朝倉物理学大系

荒船次郎|江沢 洋|中村孔一|米沢富美子＝編集

3

素粒子物理学の基礎 I

長島順清

[著]

朝倉書店

はじめに

本書は，これから素粒子物理学を目指そうと試みる理科系の学生，もしくは素粒子物理学を専門としてではないが基本から学ぶ意欲があり，そのためには式のチェックの労をいとわない人々を対象とした素粒子物理学の入門書であり，多彩な素粒子現象の一部を紹介することを試みた．

素粒子物理学は，数学的道具として場の量子論を使う．場の量子論は量子力学と特殊相対性理論をドッキングさせたものである．しかし相対性理論を必要とする現象はほとんど素粒子と一部の宇宙現象に限られており，大学で相対論まで学ぶ人は少ない．この事実が，そして場の量子論の数学的難解さが，素粒子物理学を近づきがたい学問としている．数学的な面を多少なりとも整合的に解説しようとすると，素粒子現象の詳細にふれる余裕はない．場の理論の教科書は数多くあるのに反し，彩り豊かな素粒子現象の包括的な解説書が少ないのは，実験成果が日進月歩で出現しつつある現状では，瞬く間に時代遅れとなるからであろう．しかしながら，数少ないこの方面の解説書を苦労して探しても，式は説明なしに与えてしまっていることが多く，大学院生のゼミのためのバランスのとれた教科書の必要性を常日頃感じていた．

この文章を読んでいる人で，過去に量子力学の展開する世界に驚愕し魅せられた人は多いであろう．いったん量子力学に踏み込んだ後は，自分の世界観が全く変わってしまったことを認識すると思う．しかし，シュレーディンガー方程式を理解せずに量子力学を学んだとしたら理解の深さはどの程度であったろうか．現象の解説書に多い，天下りに式を与える方式に筆者が抵抗を覚えるのはこの理由による．

本書では，素粒子現象を理解するための必要な準備として，場の量子論の初

歩的解説をまず分冊 I で行う．しかし，目的はあくまでも素粒子現象の理解であるから，数学的な詳細には踏み込むことは避けた．分冊 I の目標は対象とする素粒子反応を場の量子論を使って，少なくも摂動の最低次(トリー近似)では正確に自分で計算できるようにすることである．高次計算については概念的な解説に止めた．この本を学習するために量子力学の知識は必要であるが，それ以上は要求していない．実験がどのようにして行われるかの必要最低限の知識を与えるために，加速器と測定器の章を一つ設けた．この組み合わせに戸惑う人はこの章を省略しても構わないが，純粋に理論を目指す人でも，この程度の実験的技術の知識はもっていて欲しいと思う筆者の願いである．

分冊 II では素粒子現象について解説するが，素粒子のクォーク構造を理解することと，統一理論が成立していく過程に重点を絞った．このため電弱相互作用現象に重点を置き，ハドロン現象は最小限に止めている．K 中間子における CP の破れ現象は，この筋から外れるにも関わらず含めたのは，現象としては 1962 年にすでに発見されていたこと，K 中間子崩壊の実験的な蓄積が，最も厳密な CPT 保存の検証証拠を与えることを重視したからである．ただし，統一理論からの切り口は別の巻に譲った．統一理論の成立をもってこの素粒子物理学入門解説の区切りとしたため，実験データは最新であるものの，標準理論が予言して 1970 年以降に発見された新現象は含まれていない．標準理論の詳細な枠組みと予言，その実験的検証については，独立な解説本として本シリーズ第 5 巻『素粒子標準理論と実験的基礎』として出版する予定である．標準理論の中で未解明の部分，すなわち CP 非保存現象とヒッグスの物理，さらには標準理論を超える現象については，もう一つ別の独立な本として本シリーズ第 6 巻『高エネルギー物理学の発展』として出版予定である．

この本で心がけたことは，後々までも参考書として使えるようにするということである．そのために章ごとに話題が完結するように心がけ，後で参照しやすい形とした．また，引用文献，付録に載せる式などは本文で必要なもの以上に集めてある．この結果として，各章の後半では多少むずかしいテーマを扱うこともある．習熟レベルに照らして難度が高いと思われるセクションや演習問題には＊印を付けた．むずかしいと感じたら無理に理解しようと思わず先に進んで，後で参照する参考とされたい．

終わりに，本書を執筆する機会を与えて下さった編集者の荒船次郎氏と江沢洋氏に感謝する．特に荒船氏には全編を通して詳細に査読し間違いを指摘していただきまたサジェッションもいただいた．荒船氏の叱咤激励なしにはこの本は完成しなかったろう．大阪大学の吉川圭二，高杉英一，東島 清の諸氏にはいろいろご批判ご指導をいただいた．また，この執筆のため筆者の研究室スタッフ・学生諸氏にはいろいろ協力していただいた．この場を借りて感謝の意を表する次第である．最後に，本書の刊行に向けご面倒をおかけした朝倉書店の方々に感謝の意を表する．

1998年10月

筆　　者

目　　次

第II巻目次

1
序　　　論

a.　素粒子の変遷

素粒子物理または高エネルギー物理学は，物質の究極要素は何かを追求し，これら構成要素間に働く力（相互作用）の仕組みを調べる自然科学の一分野である．科学技術の発展で探索可能なミクロな物質のサイズは時代とともに小さくなるので，ある時代には素粒子と見なされていたものが，次の時代には大きさをもつ構造物と認識され，より基本的な次の階層の粒子に素粒子の座を明け渡す．歴史はこの繰り返しであった．近代原子論が成立した 19 世紀にあっては，探索可能なミクロ領域のサイズは$\sim 10^{-8}$ cm であり，原子が素粒子であった．原子が構造体であると認識されたのは，陰極線によって電子が引き出されたからであり，その原子の構造（ラザフォード模型）はアルファ (α) 線粒子の白金による散乱パターンを調べることによって得られたものである．原子の中心にある原子核が陽子と中性子より成ることがわかったのは 1932 年頃であり，近代的な意味での素粒子物理の時代はこの頃から始まったといえる．陽子や中性子（原子核を構成するのでまとめて核子と呼ばれる）およびその仲間である π 中間子などはつい最近まで素粒子と考えられてきたが，今はより基本的な粒子の複合体であることが明らかにされた．現代技術で探索可能なミクロサイズは 10^{-18} cm に迫りつつあり，現代の素粒子はクォークおよびレプトンという名前を与えられている．

b.　顕微鏡としての加速器

微小構造を調べるには，対象となる物質を拡大してわれわれの目に見えるようにする顕微鏡，あるいはより一般的には，われわれの五感で知覚できるような道具が必要となる．顕微鏡で光を集束する部分に対応するのが粒子加速器で

あり，光を物質に照射することは，高エネルギー粒子を標的に衝突させることに対応する．そして散乱光は対物レンズにより像を結び，接眼レンズによって人間の目に認識できるようにされるが，これは衝突によって散乱された粒子の散乱パターンを放射線測定器が検知し，コンピューター処理によって，人間に認識できるように変換することに対応する．顕微鏡の倍率はレンズの組み合わせで決まるが，実はこれは人間の目が認識できるように光の散乱パターンの像の大きさを変化させているだけであって，解像できる大きさは入射粒子すなわち光の波長でほぼ決まっている．光学顕微鏡より強力な電子顕微鏡は，入射粒子として電子ビームを使用し，光学レンズの代わりに四重極電磁石を用いてビームを集束させる．散乱された電子は，蛍光板に照射することにより人間の目に知覚できるパターンとして現れる．つまり電子顕微鏡はミニ加速器なのである．量子力学の考え方を使えば，粒子は波の性質をもち，その波長はプランク定数を運動量で割った量（ドブローイ波長 $\lambda \sim h/p$）で与えられる．したがって，顕微鏡としての加速器の解像力は入射粒子のエネルギーに直接比例することがわかる．物質の，よりミクロな領域の探索には，より高いエネルギーの粒子を必要とする．したがって素粒子現象の解明にはその時代に実現可能な最もエネルギーの高い加速器が道具として必要なわけであり，素粒子物理が高エネルギー物理学とも呼ばれるのはこうした理由からである．

素粒子物理学史上重要な発見およびそれに使用された加速器を時代別に整理してみると（図 1.1，表 1.1），まさしくその時代の最高エネルギーの加速器に集中していることがわかる．現在稼働中の最高エネルギーの加速器は，米国イリノイ州の Tevatron（全エネルギー 2 TeV($=2\times10^{12}$ 電子ボルト）の陽子・反陽子衝突型加速器）であるが，欧州の CERN では，LHC (large hadron collider) という全エネルギー 16 TeV の陽子・陽子衝突型加速器が建設中で，順調に進めば 2007 年に稼働開始予定である．距離に換算して 10^{-18} cm のミクロサイズの探求が可能である．

c. 力の本質と統一

自然界には四つの力，**重力**，**電磁力**，**強い力**，**弱い力**が存在する．名前が示すように，強い力は電磁力より強く（約 100 倍），弱い力は電磁力より弱い（約 1000 分の 1)．素粒子の世界では重力の強さは圧倒的に小さく無視してよい

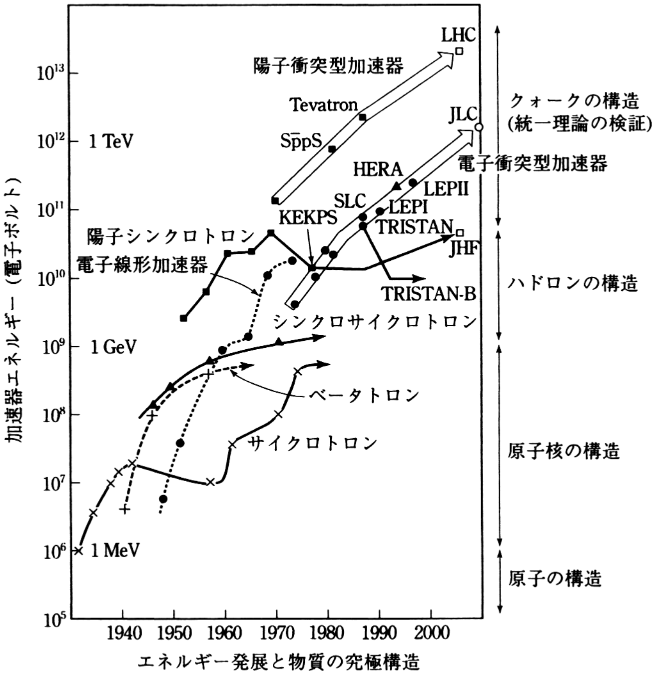


図 1.1　加速器の発展

表 1.1 (素粒子年代表)　素粒子物理学史上の重要発見と関与した加速器 [(　) 内は理論的業績]

年	発 見 者	摘　　要	加 速 器
1897	J.J. Thomson	電子の発見	加圧陰極管
1911	E. Rutherford	原子模型	α 線
1920	〃	陽子の抽出	
1930	P.H.A. Dirac	(ディラック方程式)	
1932	J. Chadwick	中性子の発見	α 線
〃	C. Anderson	陽電子の発見	宇宙線
1933	W. Pauli	(ニュートリノの予言)	
1935	H. Yukawa	(中間子論)	
	E. Fermi	(弱い相互作用の理論)	
1937	C.H. Anderson, S.H. Neddermyer	ミューオン発見	宇宙線
1947	G.F. Powell	π 中間子の発見	宇宙線
〃	G.O. Rochester, C.C. Butler	ストレンジ粒子の発見	宇宙線
1946	S. Tomonaga,	(量子電磁力学 (QED))	

~49	J. Schwinger, R. Feynman		
1950~55		ストレンジ粒子群の連携生成	Cosmotron
1955	E. Segre, O. Chamberlain	反陽子の発見	Bevatron
〃	K. Nishijima, M. Gell-Mann	(西島-ゲルマン法則)	
1956	C.N. Young, T.D. Lee	(パリティ非保存の予言)	
1956	S. Sakata	(坂田モデル)	
1957	C.S. Wu	パリティ非保存の実験的検証	
1960~70	L.W. Alvarez *et al.*	泡箱による共鳴群の発見	Bevatron, Cosmotron
1964	M. Gell-Mann, G. Zweig	(クォークモデル)	
1962	L. Lederman, M. Schwarz, J. Steinberger	2-ニュートリノの発見	BNL-AGS
〃	V. Fitch, J. Cronin	CP 非保存の発見	BNL-AGS
1964	N. Samios *et al.*	Ω 粒子の発見	BNL-AGS
1961 ~68	S. Glashow, S. Weinberg, A. Salam	(電弱統一理論)	
1969	J.I. Friedman, H.W. Kendall, R.E. Tayler	深非弾性散乱による 陽子のパートン構造	SLAC
1972 ~80		ニュートリノ物理	Fermilab CERN-SPS
1973	H.D. Politzer, D.J. Gross, F. Wilczek	(漸近自由の発見 (QCD))	
〃	A. Lagarrigue *et al.*	中性カレントの発見	CERN-PS
1974	C.C. Ting, B. Richter	J/ψ の発見	BNL-AGS SPEAR
1974 ~79		チャーム・スペクトロスコピー	SPEAR DORIS
1975	M. Pearl	τ の発見	SPEAR
1978	L. Lederman *et al.*	Υ の発見	Fermilab
1978 ~79		ボトム・スペクトロスコピー グルーオンの発見	CESR DESY-PETRA
1983	C. Rubbia, van der Meer	Z^0, W の発見	CERN S$\bar{p}$pS
1990		$N_\nu=3$	CERN LEP
1994		トップクォークの発見	TEVATRON

(重力をも含む統一理論を考えるときは，現在ではとうてい実現できないエネルギースケール（$\sim 10^{19}$ GeV）を扱う)．マクロの世界を支配する力は重力であり，その強さは距離の逆自乗に比例する．重力の到達距離が天文学的スケールであることは，数千万光年を隔てた銀河群が互いに引き合っていることが観測されていることからも知れる．電磁力は，原子核と電子を結んで原子を，原子を結び付けて分子を，そして分子を結び合わせて物質をつくり上げている力である．つまりミクロなレベルで決定的な役割を果たしている力である．

さらに極微の世界，原子の中心にある原子核にまで入り込むと強い力が支配するようになる．原子核は陽子と中性子よりなり，これらの粒子に働く力を核力と呼ぶ．湯川博士は，1935 年に核力の媒体としての π 中間子を提案して強い力の起源を説明しようと試みた．この“力は粒子により伝達される”という概念は，今日のゲージ理論の根底をなす革命的な提案であった．その後，核子や π 中間子もまた，さらに基本的なクォークより構成されることがわかった．このクォークに働く力（色の力とも呼ばれる）が本来の強い力であり，電磁力に比べ 100 倍も強い．核力も強い力の一種であるが，色の力より派生した 2 次的な力と考えられている．核子やクォークにはこのほか弱い力も働く．弱い力の果たす役割は明らかではないが，重力，電磁力，強い力が，それぞれ異なった階層で果たしている役割を考えると，次の階層で重要な役を演じている可能性がある．

電磁力はミクロなレベルで重要な力であるが，その到達力はマクロなレベルに及ぶ．その結果，例えばモーターを動かすとか，地球磁場が観測されるとか，日常生活にも影響のある事象が感知される．この理由は電磁力の強さが，クーロンの法則で表されるようにやはり距離の逆自乗に比例することからくる．一般に力の強さが距離の冪(べき)でしか減衰しないとき(r^{-n})は，距離がいかに大きくとも十分な量の力の源が存在すれば力を及ぼすことが可能であり，このような力を**長距離力**と呼ぶ．一方，強い力は，原子核の大きさ程度($\sim 10^{-13}$ cm)にしか及ばない**短距離力**である．弱い力の到達距離はさらに小さく 10^{-16} cm くらいである．強い力や弱い力が，重力よりはるかに強い力であるにもかかわらず，マクロの世界で観測にかからないのはこのためである．短距離力であるがゆえに，いくらたくさんの量を集めても，協力して大きな力とすること

ができないのである．しかし，強い力の及ぶ範囲程度に物質を閉じ込めて反応させることができれば，大きなエネルギーを発生することが可能である．原子力や核融合はそのような現象の応用である．

このように電磁力，重力と強い力，弱い力との間にはかなり本質的な差があるように見えるが，統一理論によれば，短距離力であるのは見かけにすぎず，すべての力は本質的に長距離力であり，ゲージ理論という数学的枠組みで扱えることが明らかになった．本来は長距離力である電磁力が，短距離力になる現象の典型例に超伝導現象がある．リニアモーターカーは，マイスナー効果を利用して浮上するが，これは超伝導体の中には磁力が入り込めないために起こる．この理由は，極低温になるとある特殊な配置をした電子対（クーパー対と呼ばれる）が大量に発生して，磁力が侵入してくると渦電流をつくり，磁力を打ち消してしまうことによる．この遮蔽効果はほぼ完璧であるが，わずかに遮蔽しきれない部分だけ，磁力が超伝導体の中に侵入できる．言葉を替えれば，本来は長距離力である磁力が，超伝導体の中では短距離力となるのであり，力の到達距離分だけしか侵入できないので，マクロ的には磁力が跳ね返されるように見えるのである．現代統一理論の真髄は，“われわれを取り囲む真空が実は超伝導状態にある”と認識することにある．クーパー対に相当するのがヒッグスと呼ばれる粒子である．ヒッグス粒子は，われわれが真空と呼んでいる空間に大量に存在するが，まだわれわれの観測網には掛かっていない．弱い力は，本来は長距離力であるが，ヒッグス粒子によるマイスナー効果により，短距離力となっている．ヒッグス粒子は，真空を超伝導状態に相転移させるとともに，あらゆる素粒子（クォークとレプトン）に作用し，その相互作用エネルギーがその素粒子の質量に成ると考える，このからくりを**ヒッグス機構**と呼ぶ．相転移が起こる前は，弱い力と電磁力は，ちょうど電気力と磁気力が一つの電磁力の別の切り口であると同じように，一つの力の別の側面であることも理解された．電磁力と弱い力は統一されているのであって，まとめて**電弱力**と呼び，これを記述する**電弱統一理論**は，発明者の名前をとり，グラショウ-ワインバーグ-サラムの理論とも呼ばれる．

一方，強い力は別の理由で短距離力となっている．クォークはいくつか集まってハドロンと呼ばれる粒子群を構成する．陽子や π 中間子はハドロンの

仲間である．クォークの間の力（色の力）は，短い距離（ハドロンの大きさの$\sim 10^{-13}$ cm 以下くらい）では他の力と同じく距離の逆自乗に比例する力であるが，距離の大きいところでは一定で減衰しない成分をもつ．クォークとクォークはいわばバネもしくは紐で繋がれた状態にあり，この紐には距離に比例したポテンシャルエネルギーが蓄えられる．その結果二つのクォークをマクロなスケールに分離するには無限大のエネルギーを必要とする．すなわち，クォークを引き離して単独に取り出すことはできないと信じられていて，これを**クォークの閉じ込め**という．クォークは全体で色の力の源が中性になるような組み合わせ（ハドロン）でしか存在できない．ハドロンの近傍で眺めれば色が中和できていない部分があり，これが核力などハドロン間のいわゆる強い力を生み出すのである．ハドロンからある程度離れると色は中和されたものとしか見えなくなる．核力が，ある程度離れると急速に弱くなる短距離力であるのはこの理由による．したがって，ハドロン間の力は，分子間に働くファンデアワールス力のようなものであり，本来の強い力すなわち色の力から派生した2次的な力といえる．

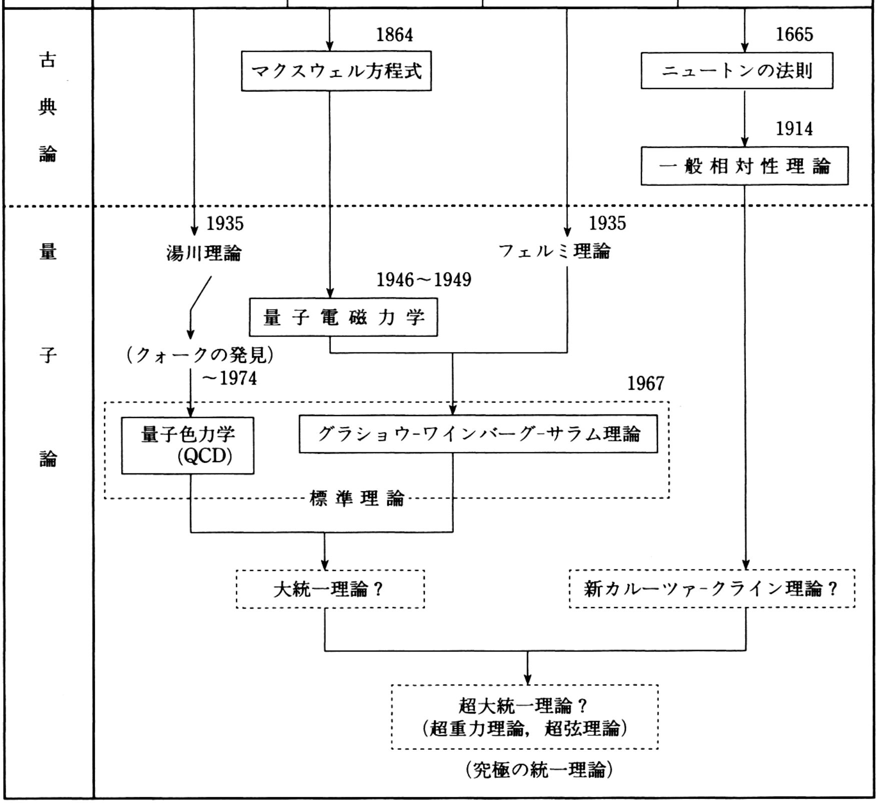
弱い力と電磁力が統一されており，またすべての力がゲージ理論で記述されることに注目すれば，すべての力は統一されていると考えるのは自然なことである．電弱力と強い力を統一する大統一理論，すべての力を統一するいわば超大統一理論ともいうべき理論（超重力理論や超弦理論を含む）は，現在活発な研究対象であるが，実験的にはっきり確立しているといえるのは，電弱力を記述するグラショウ-ワインバーグ-サラム理論と，色の力を記述する**量子色力学**(QCD；quantum chromo-dynamics）であり，合わせて**標準理論**という．統一理論の体系を表1.2に示す．この標準理論は大型加速器が稼働し始めた1960年代から，1980年にかけて，急速かつ大量に集められたデータを軸にまとめられたものである．標準理論の完成は，今世紀初頭のラザフォードに始まり，80年に及んだ物質解明史に一つの区切りを与えたものであり，われわれの意識（物質観）に対する影響の大きさからいえば，相対論や量子力学にも匹敵する革命といってよい．この標準理論は非常に強力であり，すべての現象を簡明にかつ統一的に説明する．現在でも標準理論に矛盾する事実は見つかっていない．どんな現象も標準理論で少なくとも原理的には説明できてしまうの

で，現在は新しいことが期待できるような実験テーマを簡単には見いだしにくい時代である．新現象が期待できる実験を行うには思い切ったエネルギーの飛躍が必要と考えられている．

高エネルギー物理学で取り扱う現象は，粒子のもつ運動エネルギーが質量エネルギーをはるかに超えていて，基本的な枠組みとして特殊相対論を必要とする．量子論と相対論という二つの革命的思考展開が必要な学問分野は極限的な宇宙現象以外は素粒子現象に限られている．このことが高エネルギー物理学を近づきにくい学問としている．

表 1.2 力の統一理論

	強い力(核力)	電磁力	弱い力	重　力
強さ	~0.1(10)	1/137	$\sim 10^{-5}$	$\sim 10^{-38}$
源	色　荷（核物質）（クォーク）	電　荷	弱　荷	質　量（重力荷）



2
粒　子　と　場

現代物理学においては，粒子とは場に付随するエネルギー量子のことである．場とは，時間，空間（合わせて時空）のあらゆるところで定義される量で，波動を引き起こす能力をもつ．歴史を振り返ると，電磁波を生じさせる媒体としてのエーテルが提起され，最終的に物理的実体としてのエーテルの存在が否定された．今日では時空そのものに電磁波を伝える媒体としての能力があると解釈する．同様に，時空は他の種々の場を包含する能力があり，場を量子論で取り扱うとそれぞれの場に付随した粒子の振る舞いを記述することができる．この章では，粒子と場の概念を直観的に把握し，さらに場の理論の取り扱いに必要な基本的な道具や用語を準備する．

2.1　粒子とは何か？

粒子を特徴付ける属性はいくつかある．

1)　**粒子は，各瞬間瞬間で空間的に局在していて，数を数えることができる．**

古典力学では，質量 m および速度 $\boldsymbol{v}$ またはエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ が定義できる．粒子の速度が光の速さに比べ十分小さい非相対論近似が成り立つとき，自由粒子は，質量を m として，

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v},\quad E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m},\quad p=|\boldsymbol{p}| \tag{2.1}$$

であるが，速度が光の速さに近いときは相対論で扱わねばならず，アインシュタインの式

$$\boldsymbol{p}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{2.2}$$

を使う．これらの式は，粒子の質量がゼロでないことを仮定するが，エネルギーと運動量が既知の場合は，(2.2) から導かれる式

$$E^2=(pc)^2+(mc^2)^2, \qquad \boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}c^2}{E} \tag{2.3}$$

によって，質量と速度を定義してもよい．この式は，質量ゼロの粒子に対しても成立する．質量ゼロならば，$E=pc$ であるから v は常に c に等しい．

2) **粒子は生成・消滅をする．**

例えば，

$$\begin{aligned}
e^+ + e^- &\longrightarrow \gamma + \gamma \\
&\ \mu^+ + \mu^- \\
&\ p + \bar{p} \\
\pi^+ &\longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\
\pi^- + p &\longrightarrow K^0 + \Lambda
\end{aligned} \tag{2.4}$$

この結果ある特定の粒子の存在確率は保存しないので，素粒子反応を記述するには，シュレーディンガー方程式で扱う 1 体波動関数のみでは不十分で，量子化された場の理論が必要となる．

3) **粒子は，必ずしも安定ではない．**

これは，2) から必然的にでてくるもので，例えば π 中間子はミューオンとニュートリノなどに崩壊し，平均寿命 τ は約 2.6×10^{-8} 秒である．これは π の存在に $\Delta t\sim\tau$ の時間的不定性があることを意味するので，ハイゼンベルグの不確定性原理

$$\Delta E\cdot\Delta t\gtrsim\hbar \tag{2.5}$$

より，エネルギーすなわち質量にも不定性があることを示す．ただし，$\hbar$ はプランクの定数 h を 2π で割ったものである．π 中間子の場合

$$\begin{aligned}
\Delta m\sim\Delta E/c^2 &\sim (6.58\times10^{-22}\,\mathrm{MeV\cdot sec})/(2.6\times10^{-8}\,\mathrm{sec})/c^2 \\
&\sim 2.5\times10^{-14}\,\mathrm{MeV}/c^2 \\
\therefore\quad \Delta m/m &\sim 2.5\times10^{-14}/140\sim2\times10^{-16}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

であるので，質量の不定性は事実上測定不可能であるが，ρ 中間子の場合は寿

命が 4.2×10^{-24} 秒くらいであり（実際はこのような短い時間測定は不可能で，質量幅（後述，式 (2.14)）から逆算する），

$$\varDelta E\sim 6.58\times10^{-22}\,\mathrm{MeV\cdot sec}/4.2\times10^{-24}\,\mathrm{sec}\sim 160\,\mathrm{MeV} \qquad (2.7)$$

となって，質量の不定性は質量値 ($780\,\mathrm{MeV}/c^2$) に比べて無視できない．つまりこの場合，

$$\varDelta m/m\sim 0.21 \qquad (2.8)$$

であり，質量に 21 %の不定性があることになる．この現象を，もう少し定量的に扱ってみよう．寿命が τ であるということは，$\mathrm{d}t$ 秒という短い時間を考えれば，この間に $\mathrm{d}t/\tau$ だけ死ぬ確率があるということであり，N 個のうち $\mathrm{d}N$ 個死ぬとすれば，

$$\mathrm{d}N/N=-\mathrm{d}t/\tau$$

$$\therefore\quad N(t)=N_0\cdot\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad (2.9)$$

一方，ある粒子の存在確率は波動関数 ψ の自乗に比例するから，

$$|\psi|^2\propto\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

エネルギー固有状態の波動関数は，$\psi(x,t)\sim\psi(x)\mathrm{e}^{-iEt/\hbar}$ のような時間依存性をもつので

$$E=E_0-i\Gamma/2$$

とおくと

$$|\psi(t)|^2=|\psi(0)\mathrm{e}^{-i(E_0-i\Gamma/2)t/\hbar}|^2=|\psi(0)|^2\mathrm{e}^{-\Gamma t/\hbar}$$

$$\therefore\quad \Gamma=\hbar/\tau \qquad (2.10)$$

これから，不安定であることと，虚数のエネルギーをもつこととが同等であることがわかる．このとき質量はどのような分布をするのであろうか？　波動関数は，エネルギーの関数として

$$\tilde{\psi}(E)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\psi(t)\mathrm{e}^{iEt/\hbar} \qquad (2.11)$$

のようにフーリエ分解できるから，素粒子が $t=0$ で生成されたとすると，

$$\psi(t)=0\quad\text{for}\quad t<0$$

を入れて

$$\tilde{\psi}(E)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}t\,\psi(t)\mathrm{e}^{iEt/\hbar}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{d}t\ \psi(0)\mathrm{e}^{-i(E_0-i\Gamma/2)t/\hbar}\cdot \mathrm{e}^{iEt/\hbar}$$

$$=\frac{\psi(0)}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\hbar}{E-E_0+i(\Gamma/2)} \tag{2.12}$$

したがって，素粒子があるエネルギー E をとる確率は，

$$P(E)\propto|\tilde{\psi}(E)|^2=\frac{|\psi(0)|^2}{2\pi}\frac{\hbar^2}{(E-E_0)^2+(\Gamma/2)^2} \tag{2.13}$$

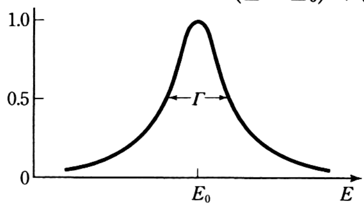


図 2.1 ローレンツィアン＝ブライト-ウィグナーの共鳴公式

となる．この関数は図 2.1 のような形をしていて，ローレンツィアンと呼ばれ，原子核の不安定なレベルを表すブライト-ウィグナーの共鳴公式と同じ形をしている．Γ は，関数の最大値の半分となるところの全幅となるので，full width at half maximum (FWHM) または，半値全幅ともいう．これより

$$\Delta E\cdot\Delta t\sim\Gamma\cdot\tau=\hbar$$

というハイゼンベルグの不確定性原理が再現された．素粒子の仲間の中で，ρ 中間子や Δ 共鳴などの不安定粒子は

$$m(\rho)=776\ \mathrm{MeV/c^2},\qquad \Gamma=158\ \mathrm{MeV},$$
$$m(\Delta(1236))=1236\ \mathrm{MeV/c^2},\qquad \Gamma=115\ \mathrm{MeV} \tag{2.14}$$

をもっている．最初はそれぞれ $\pi\pi$ 散乱や π-陽子散乱における共鳴レベルとして発見されたので，このように幅の広い不安定粒子を一般に共鳴ともいう．

4) **粒子には対応する反粒子が存在する．**

反粒子とは粒子と質量やスピンは同じであるが，電荷などの内部量子数が逆の粒子のことをいう．例えば陽電子は電子の反粒子である．粒子と反粒子が遭遇すると粒子は消滅して純粋のエネルギーとなる．

5) **素粒子はスピンをもつ．**

スピンは時間空間座標によらず，粒子がもつ固有角運動量のことであり，古典的には自転運動の強さに対応する．プランクの定数（を 2π で割ったもの）

$\hbar$ を単位として，整数または半奇数の値をとる．物質の基本粒子であるクォークとレプトンはスピン 1/2 をもち，力の伝達粒子は原則としてスピン 1 をもつ．重力場の粒子グラヴィトンは例外的にスピン 2 をもつ．すなわち，すべての基本粒子はスピン 1/2 か 1 (例外的に 2) をもつ．標準理論で重要な役割を演じるヒッグス粒子はスピン 0 をもつが，現時点ではヒッグス粒子が素粒子かどうかは明らかでないのでいまは考えないことにする．

6) **素粒子には，物質の構成粒子と，力の伝達粒子との 2 種類がある．**

今日単独に取り出せる物質の最小単位は原子核を構成する陽子と中性子それに電子である．強い相互作用をする粒子の仲間をハドロンと総称する．ハドロンの仲間でスピンが半奇数のものをバリオンといい，陽子中性子や Λ 粒子などが含まれる．スピンが整数のものをメソン（中間子）といい π, K, ρ などがある．これらハドロンはさらにクォークと呼ばれるスピン 1/2 の粒子から構成されていることがわかっているが，クォークは単独では取り出せない（クォークの閉じ込めという）と考えられている．今日 6 種類のクォークが知られている．電子やその仲間のニュートリノ (ν_e) など強い相互作用をしない粒子はレプトンといわれる．レプトンはほかにミューオン，τ 粒子とそれらに随伴するニュートリノ (ν_μ, ν_τ) が知られている．ニュートリノの質量は現在実験の測定範囲内でゼロである*1)．結局物質の構成粒子としてはクォーク・レプトンとも 6 種類ずつあることになるが，これらはさらに 3 世代に分類することができる (表 2.1)．自然界に存在する安定物質はほとんど第 1 世代の ($\mathrm{u}, \mathrm{d}, \nu_e, \mathrm{e}^-$) の粒子より成り，他は高エネルギー反応でつくられるが，ニュートリノは別として不安定で直ちに崩壊する．第 2，第 3 世代は質量以外は第 1 世代とよく似た性質をもち，ほとんど第 1 世代の繰り返しである．なぜ世代が存在するかは未知である (世代の謎)．第 4 世代以降が存在するかどうかを探る手がかりはないが，Z 粒子の崩壊全幅の測定から $m_\nu < m_Z/2$ のニュートリノの数は 3 種類しかないとわかっている．つまり第 4 世代が存在するとすればそのニュートリノの質量はそれまでの 3 世代に比べて突然大きくなるわけであり，これを不自然

*1) 最近岐阜神岡の地下実験測定器スーパーカミオカンデにより，ν_μ が他のニュートリノへ変わるニュートリノ振動現象（演習 2.13 参照）が発見された．これは有限質量を意味する．本書の範囲ではニュートリノ質量をゼロとして差し支えない．

と考えれば世代数は3でつきていることになる.

自然界には物質の構成粒子の他に力の媒介粒子が存在する. 現在自然界には4種類の力（重力, 電磁力, 強い力, 弱い力）が存在することがわかっているので, それに対応して, 力の媒介粒子も4種類存在する（表2.1). それぞれ重力子（グラヴィトン), 光子（フォトン), グルーオン, および W, Z（またはウィークボソン）という名前を与えられている.

以上をまとめて物質粒子と力の伝達粒子を表2.1に掲げる.

表 2.1　素粒子の表

物質の構成粒子					
名　称	スピン	電荷	第1世代	第2世代	第3世代
クォーク	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	u（アップ）	c（チャーム）	t（トップ）
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	d（ダウン）	s（ストレンジ）	b（ボトム）
レプトン	$\frac{1}{2}$	0	ν_e	ν_μ	ν_τ
	$\frac{1}{2}$	-1	e	μ	τ

四つの力と力の媒介粒子					
種　類 源	強い力 色　荷 RGB（3種）	（核力） （核物質）	電磁力 電　荷 （1種）	弱い力 弱　荷 （2種）	重力 質量
強　さ	~0.1	(10)	1/137	10^{-5}	10^{-39}
到達距離 (cm)	10^{-13}	(10^{-13})	∞	10^{-16}	∞
ポテンシャル	$k_1\frac{1}{r}+k_2r$	$\frac{\exp(-m_\pi r)}{r}$*	$\frac{1}{r}$	$\frac{\exp(-m_W r)}{r}$*	$\frac{1}{r}$
粒　子　名 （スピン）	グルーオン (1)	（π 中間子） (0)	フォトン (1)	$W^\pm, Z^0$ (1)	グラヴィトン (2)
理論	QCD**	（湯川理論）	QED***		一般相対論
			GWS*理論		
ゲージ群	$SU(3)$		$SU(2)\times U(1)$		

*　m_π, m_W は, 正確には $m_\pi c/\hbar$, $m_W c/\hbar$ である.
** Quantum Chromo-Dynamics
***Quantum Electro-Dynamics
*　Glashow-Weinberg-Salam

2.2 場 の 概 念

2.2.1 力 の 場

遠隔力と近接力 ニュートン流の考え方では，万有引力は次のように表される．

$$f = -G_{\mathrm{N}} \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{2.15}$$

これは，質量 m_1 の物体が，r という距離を飛び越えて，直接質量 m_2 の物体に力を及ぼすという式であり，このような力を遠隔力という．今思考実験として，$t=0$ で太陽が突然消えたとしよう．このとき地球にはどういうことが起こるであろうか？ ニュートンの式に従えば，力の源である質量がなくなるわけであるから力もゼロとなり，地球は太陽が消滅した瞬間に宇宙空間に投げ出されるであろう．ところでアインシュタインの相対性原理に従えば，この世の中に光速以上で走れるものはない．とすれば，太陽が消滅したという情報も光速以上では伝わらない．太陽から地球までの距離は光速で走っても 8 分はかかるから，太陽が消滅してから地球にその情報が伝わるのもそれ以上はかかるはずである．この 8 分の間は地球は太陽が消滅したとは知らないから，太陽の引力を受けているはずである．そうすると，引力を及ぼす実体として太陽以外の何物かが存在するはずということになる．これが“場”と呼ばれるものである．太陽（質量）が，周りの空間に万有引力の場をつくる．この場は全空間につくり出されるものであり，地球に働く力は地球の存在する地点での場が及ぼすと考える．このような力を近接力という．この考え方に従うと，力が働くところ必ず場が存在する．万有引力には万有引力の場が，電磁力には電磁場が付随する．よく知られた例として，電磁場のマクスウェルの方程式を眺めてみると

$$\mathbf{f} = q_1 \mathbf{E}, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{2.16}$$

は，力の源である電荷分布 ρ によって電場 $\mathbf{E}$ が全空間につくられ，電場のあるところに置かれた別の電荷 q_1 に $\mathbf{f}$ という力を及ぼすという式である．静電場が点電荷 q_2 によってつくられる場合

$$\rho = q_2\delta^3(r), \qquad \delta^3(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{2.17}$$

と δ-関数で表され，上のマクスウェルの式に入れて解くと，

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2.18}$$

というクーロンの法則を再現する．磁力も同じように考えられる．電流が存在すると磁場が発生し，磁場があるところに他の電流が存在すると磁場はその電流に力を及ぼす．電流は電荷の運動により生じるから，これは電場が動くと磁場が発生することを意味する．逆もまた真である．ある物が動くという現象は座標変換により変わる相対的事実であって，電場と磁場は座標変換で結ばれている．つまり電場と磁場は物理的実体としては同一であり，観測者によって見かけが変わるにすぎないという結論に達する．マクスウェルの方程式は電場と磁場の統一理論なのである．電磁場が時間的に変動すると電磁波となる．電磁波は，時間的に振動する電荷によって発生するが，いったん発生した電磁波はエネルギーの担い手であり，発生源とは独立の，それ自身観測にかかる独自の物理量である．量子力学によれば，エネルギーを担う波は粒子としての性格をもつ (エネルギー量子)．電磁波の量子は光子 (フォトン) と呼ばれる．以上の考察から，相対性原理と量子原理を組み合わせると力の媒介粒子が存在することが証明できた．すなわち，電荷 (力の源) が電磁場をつくることは，電荷 (源) がフォトン (＝場の粒子＝力の媒介粒子) を放出することであり，電磁場 (場) が電荷 (源の粒子) に力を及ぼすことは，電荷によってフォトンが吸収されることを意味する．こうして力が働くということは力の伝達粒子を交換することであることが場の量子論から導ける．電磁波は，それ自身単独で電荷に力を及ぼせることを考慮すると，結局力が働くということは，場の粒子を放出または吸収することと同義語である．古典力学的な意味で使う“力”とは，空間移動に伴うエネルギーの変化のことであり，エネルギーが空間変数の関数として表されれば導ける量である．一方，量子力学ではエネルギー変換を直接扱う．そこで，力が働くという言葉の代わりに相互作用をするという言葉を使い，一般的にエネルギーをやり取りするプロセス全体に拡張して適用することにしよう．以下，特に断らない限り，エネルギーで話をすることにする．2個の陽子の間の電磁相互作用は，クーロンのポテンシャルで表され，

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}=\alpha\frac{\hbar c}{r}$$

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\sim\frac{1}{137} \tag{2.19}$$

となる．ここで，α という無次元の量を定義するために，$\hbar c$ が［エネルギー×距離］の次元をもっていることを使った．e は，陽子のもつ電荷量で，約 1.6×10^{-19} クーロンなる値をもつ．α は微細構造定数と呼ばれ，電磁相互作用の基本的な強さを表す量である．同様にして，2 個の陽子間に働く重力の強さを表す無次元の量として，

$$\alpha_G=G_N\frac{m_p\cdot m_p}{\hbar c}\sim5.9\times10^{-39} \tag{2.20}$$

が定義できる．ただし，G_N はニュートンの万有引力定数，m_p は陽子の質量である．

演習 2.1　α, α_G の上記の値を計算して確かめよ．
$\alpha_G=1$ となる質量（プランク質量という）を計算しエネルギー（GeV）で表せ．

2.2.2 物質場

a. 相対論的波動方程式

波を特徴付ける物理量は，波数 $\boldsymbol{k}$，角振動数 ω であるが，粒子を特徴づけるエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ とは，

$$\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{p}}{\hbar},\qquad \omega=\frac{E}{\hbar} \tag{2.21}$$

の関係にある．古典的粒子像から波の描像を得るには，よく知られているように

$$E\longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\qquad \boldsymbol{p}\longrightarrow -i\hbar\nabla \tag{2.22}$$

の置き換えを行い，波動関数に対する演算子とすればよい．(2.1) 式にこの置き換えを行うと，

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{(\hbar\nabla)^2}{2m}\psi \tag{2.23}$$

となり，よく知られたシュレーディンガーの波動方程式を得る．これがドブローイ波の従う方程式である．ただし，一般には粒子がポテンシャル V の影

響を受けているとしてその項をつけ加える．波動の量子化は正確には場の量子論で扱われるが，基本的には波の属性，波数 $\boldsymbol{k}$ と振動数 ω を (2.21) で与えられる E と $\boldsymbol{p}$ をもつ量子と見なすことに等しい．量子力学における自由粒子の相対論的波動方程式を得るために，(2.3) に対して同じような置き換えを実行すると，

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+\mu^2\right]\phi=0 \tag{2.24}$$

$$\text{ただし,}\qquad \mu=\frac{mc}{\hbar}$$

を得る．この式はクライン-ゴルドン (Klein-Gordon) の式と呼ばれる．この ϕ を，シュレーディンガー方程式の ψ と同じく，1 体粒子の確率振幅とみなすといろいろ矛盾がでてくる．この方程式は

$$\phi(r)=N\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar}\equiv N\mathrm{e}^{-ipx/\hbar} \tag{2.25}$$

の形の平面波解をもつ．N は規格化条件より決まる定数である．この方程式をシュレーディンガー方程式と同じく確率波動関数の方程式と解釈できるためには，連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0 \tag{2.26}$$

を満たす確率密度 ρ とその流れ $\boldsymbol{j}$（まとめて，$j^\mu=(\rho c\,;\boldsymbol{j})$）が存在しなければならない．次式で定義されるカレント

$$j^\mu=\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\partial^\mu\phi-\phi\partial^\mu\phi^*),\qquad \partial^\mu=(c^{-1}\partial_t\,;-\nabla) \tag{2.27}$$

は，(2.26) の連続方程式を満たすのでその候補となる．このカレントを時間成分と空間成分とに分けると

$$\rho=\frac{i\hbar}{2mc^2}(\phi^*\partial_t\phi-\phi\partial_t\phi^*) \tag{2.28 a}$$

$$\boldsymbol{j}=-\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*) \tag{2.28 b}$$

となり，しかも空間成分は，非相対論的シュレーディンガー方程式のカレントと同じ形をしているので，(2.28 a) で定義される ρ を確率密度と解釈したくなる．ところがこれにはいくつかの難点がある．

b. 負のエネルギー

第1の難点は，$E^2=(\boldsymbol{p}c)^2+(mc^2)^2$ を解くと $E=\pm\sqrt{(\boldsymbol{p}c)^2+(mc^2)^2}$ となり，$E<0$ の解をもつ．$E<0$ の1粒子状態は，エネルギーを放出していくらでも低いエネルギー状態へ移れるから不安定である．つまり負エネルギーの粒子には安定な粒子状態が存在しない．歴史的には，負エネルギーの解は物理的に意味がないとして，負エネルギー解なしで数学的枠組みをつくろうとする試みも行われた．しかし完全系をつくるために，また因果律を満たすためには数学的に負エネルギーの解を必要とし，負エネルギーの解抜きで体系を閉じようとする試みはいろいろなパラドックスにぶつかりうまくゆかない．

c. 負の確率

第2の難点は，クライン-ゴルドンの方程式は時間微分で2階の方程式であり，二つの初期条件 $\phi(t=0)$ と $\partial\phi/\partial t(t=0)$ を設定しないと解は一義的に決まらない．逆にいうと ϕ と $\partial\phi/\partial t$ は任意に選べるので，ρ は常に正値をとるとは限らない．実際，(2.25) の平面波解に対し，j^μ をつくってみると，

$$j^\mu=(p^\mu/m)|N|^2=(E/mc\,;\boldsymbol{p}/m)|N|^2 \tag{2.29}$$

となる．すなわち，負エネルギーの解が負の確率を与えていることがわかる．以上の理由でクライン-ゴルドン方程式は歴史的には一度は葬り去られた式であった．

d. 場の量子化

これらの難点は，ϕ を確率波動関数と解釈することをあきらめ，改めて古典的な場と見なし，e を単位電荷（もしくは対応する量子数）として

$$ej^\mu=i\hbar e(\phi^*\partial^\mu\phi-\phi\partial^\mu\phi^*) \tag{2.30}$$

を電流（に相当する）密度と解釈することによって解決をみた．

この考え方がぴんとこない人は，古典的電磁場を思い起こしてみよう．電場は，スカラーポテンシャル ϕ の勾配として，磁場はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の回転として定義される．

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2.31}$$

これらポテンシャルの満たす式は，

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right]\phi=q\rho/\varepsilon_0 \tag{2.32 a}$$

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right]\boldsymbol{A}=\mu_0 q\boldsymbol{j} \tag{2.32 b}$$

であり，この電磁場に対して，

$$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right), \qquad \boldsymbol{g}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{2.33}$$

など場のエネルギー運動量密度 w と $\boldsymbol{g}$ などの物理量が場の 2 次形式で定義できる．つまり確率振幅を使わなくとも，場の形式で物理現象を記述することは十分可能なのである．(2.32) の右辺をゼロとおけば，自由電磁波の満たす式は，クライン-ゴルドンの式で質量をゼロとおいたものに等しい．すなわちクライン-ゴルドンの式を満たす場を，量子化すれば質量をもつ粒子を生み出すような古典場 ϕ と考えるのである．ただしこのままでは古典電磁場と同じレベルの波動像しか出てこない．そこで，この場をもう一度量子化して粒子像を得る（場の量子化，または第 2 量子化という)．今日では，すべての素粒子は“場”に付随したエネルギー量子と見なされる．なぜこのように二重手間を掛けるのか？　古典的粒子を量子化したものは波動像と粒子像という量子力学の特徴を取り入れることはできる．しかし，素粒子の世界では生成消滅現象を扱わねばならず，1 体の波動関数のみでは不十分である．場を量子化すれば多体問題が取り扱えるので，いったん古典場に直すという回り道を通すのである．

さて，粒子と反粒子とが遭遇すると両者が消滅して純粋のエネルギー（フォトン）になったり，フォトンが物質化して電子と陽電子の対を生成する現象が知られている．すなわち，生成消滅できかつ相互転換可能という意味で，場の粒子と物質粒子は同等である．力の粒子は，力の場という古典的物理量から量子力学に移ることによって得られたものである．一方物質波は古典的粒子から量子化の手続きによって得られたものである．順序は逆であるが，ミクロのレベルでは，粒子像と波動像が両立しているという点で共通であり，これに場の粒子と物質粒子が相互転換可能であるということも考え合わせると，両者の実体は同一起源であると考えるべきである．物質粒子もまた“場”に付随する量子であり，この場こそ根元的な存在であると考える方が簡明であり論理的であろう．ただし，この場は力の場ではない別種の場であるので，混乱を避けるた

めに物質場ということにする．こうして，すべての粒子を何らかの場に付随した量子であると見なそうというのが現代の場の量子論の立場である．

物質粒子も場すなわち波であるとするならば，この波を伝える媒質は何であろうか？　この疑問に対する答は，われわれを取りまく空間が，こうした場を発生し波を伝える性質をもっているのだというしかない．電磁波を伝える媒質としてのエーテルが，長い論争と実験の積み重ねの結果否定され，“空間が電磁波を伝える性質をもっている”という結果に落ち着いたのと同じ論法である．波の媒質としての空間の性質の物理的議論を抜きにして，すべてこれ空間の性質であるとするのは相当強引な論理のようであるが，こうした前提から導かれる結論が物質の描像を正しく再現する限り，何らかの真実があると考えざるをえない．現代統一理論の成功は，まさに場の量子論が正しい数学的枠組みを与えることの最も大きな証人なのである．

2.2.3 場の直観的描像

すべてを空間の性質であるということで逃げるのは残念である．“原始，波動ありき”で，波動方程式から出発して，首尾一貫した数学的体系をつくることはできようが，この背景にある物理的描像，基本概念を抜きにして，数学だけを解くのは読者に親切なやり方とは思われない．そこで，場の基本概念を直観的に把握するために，似た現象を現実の世界に求め類推を試みてみよう．ただし，類推とはあくまでも似通ったところだけを取り上げてイメージをつくり上げるものであり，本質的に違う部分も多々あるので，一般論として拡張するのは危険であることは注意しておく．

取り上げる例は，物性論ではおなじみの金属結晶体中の電子の運動であり，これに及ぼす場としての格子振動である．結晶の中では，正のイオンが規則正しく格子状に配列して，各格子点で振動している．各格子はバネで繋がれた質点の集まりに似ている．一つ一つの格子の振動はこのバネにより他の格子点に伝えられていく．結晶格子の場合，バネの力の源は電磁力であり，格子振動と電子の運動との結合も電磁力である．いま，すべての格子振動が静止した状態を考えると，格子がつくる電場は少なくとも格子間隔より大きいスケールでは一様であり，電子に及ぼすような力は働かないと考えられる（電子間に働く直

接のクーロン力は，電子格子間に働く負のクーロン力によりほぼ相殺されるので電子はほぼ自由電子として振る舞う）．ここに電子を1個置くと，局在する電荷のため近傍の格子点がずれるであろう．つまり場が歪む．その結果電荷分布に非一様性が生じ，別の所に置いた電子はこれを感じる．言い換えれば，電子は場との結合を通じて互いに力を及ぼすことができる．電子を振動させれば格子振動が励起され，この振動は格子同士の結合を通して媒質全体に広がっていく．この格子振動を量子化したものはフォノンと呼ばれ，電子と格子振動との結合は，電子とフォノンとの相互作用で置き換えられる．量子化された相互作用の記述は，電子と電磁場との相互作用を記述する場の量子論と数学的によく似ている*[1]．歴史的には，後者の量子電磁力学（QED; quantum electro-dynamics）が先に確立し，それを物性論に応用したのである．フォノンには，結晶格子という物理的実体があり，その振動の量子という位置づけがはっきりしているため実在の粒子とは見なされないが，この媒質が無限に広がっており，格子間隔がわれわれに感知不可能なほど小さくかつ格子そのものが観測に掛からないものであったならどうであろうか？　フォノンを粒子と見なさない理由は何もない．われわれを取り巻く時空の実体が何であれ，このような超格子*[2]でできていて波動を起こし時空全体に伝える能力があるというのが，場とは時空の性質であるということの意味である．歴史的に最初に認知された場は電磁場であり，フォトンは電磁場に付随するエネルギー量子として位置づけられる．

2.2.4 仮 想 粒 子

自由空間を伝播する電磁波の量子としての光子と，2個の電荷の間につくられる電磁場（つまり相互作用をしているときの電磁波）の量子としてのフォトンとどう違うであろうか？　古典的粒子像から波動像を得る手続きの逆を考えると，自由電磁波の量子フォトンについては，

$$E^2=(\boldsymbol{p}c)^2+(mc^2)^2, \qquad m=0 \tag{2.34}$$

*1) フォノンは縦波をもち横波だけのフォトンとは違うところもある．

*2) ここでは比喩的な意味で使っている．物性論で使う超格子という単語は特定の意味をもつ．

というアインシュタインの関係式が成立するので，フォトンの質量がゼロであることがわかる．アインシュタインの関係式を満たす粒子のことをしばしば質量殻に乗っている (on mass shell) と表現する．相互作用を媒介中の電磁場 ((2.32) の右辺が 0 でない) に対応するフォトンはこの関係式を満たさない (off shell)．このような粒子を仮想粒子 (virtual particle) と呼ぶ．仮想粒子に対しては通常の粒子としての物理像が適用できない場合がしばしばあることに注意しておこう．たとえば，力が働くときに，文字どおり力の伝達粒子が交換されると考えると，伝達粒子を放出・吸収するときは反作用の法則により力は必ず斥力になるが，仮想粒子の場合は必ずしも当てはまらない．このことは異符号の電荷の間には引力が働くことからわかる．また，電磁場やグルーオン場の量子化に伴い，仮想粒子の場合は負の確率をもつといった奇妙な状況も起こりうるのである．

2.2.5 力の到達距離

さて，粒子は一般に質量をもつが，力の場の粒子が質量をもつとき力の強さはどうなるであろうか？　力が働くためには媒介粒子を放出しなければならない．質量をもてば，少なくも $\Delta E = mc^2$ のエネルギー不定性が生ずる．ハイゼンベルグの不確定性原理によってエネルギーの保存が破れていて良い時間 Δt は，$\sim \hbar/\Delta E$ であり，この間に伝達粒子が相手に吸収されないと力が伝わらない．粒子は光速以上では飛べないから，力の到達距離 r_0 は，

$$r_0 \lesssim c\Delta t \sim c\hbar/mc^2 = \hbar/mc \tag{2.35}$$

すなわち，有限な質量をもつ伝達粒子による力は伝達粒子のコンプトン波長位にしか及ばない．この議論をもう少し定量的に行ってみよう．上に述べたように質量 m をもつ粒子を量子化した場の方程式は，

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2\right]\phi = 0 \tag{2.36}$$

である．源のある電磁場の方程式 (2.32) の類推から，考察すべき力の強さを g(電荷の e に対応) として，点源を考えるとこのポテンシャルは次式を満足するであろう．

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+\mu^2\right]\phi=g\delta^3(r) \tag{2.37}$$

静的な場合，すなわち $\partial\phi(r)/\partial t=0$ の場合を考えるとこの方程式は簡単に解けて，

$$\phi(r)=\frac{g}{4\pi}\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-r/r_0}, \qquad r_0=\hbar/mc\equiv 1/\mu \tag{2.38}$$

演習 2.2 (2.37) から (2.38) を導け.

これは，湯川ポテンシャルと呼ばれる．$r\ll r_0$ では，クーロン型であるが，$r>r_0$ では，急激に減衰する関数である．先に力の到達距離が有限の r_0 であるといった意味の数学的定義はこの式で与えられる．万有引力やクーロン力は r_0 が無限大の場合に相当するので，長距離力と呼ばれる．湯川型のポテンシャルは短距離力と呼ばれる．湯川博士は，核力の到達距離がだいたい 10^{-13} cm という実験事実から，核力の媒介粒子としての π 中間子の存在を予言し，その質量を電子の約 200 倍と推定したのである．核力の源は核子（陽子と中性子）であるが，本来の強い力の源は，クォーク，より正確にはクォークのもつ色荷である．色の場の粒子はグルーオンと呼ばれ，その質量はフォトンと同じく正確にゼロであると考えられている．したがって，クォーク間に働くポテンシャルは，クーロン型であるが，後に述べる理由によって，そのほかに距離に比例するいわゆる閉じ込めのポテンシャルが加わり，

$$\phi(r)=k_1\frac{1}{r}+k_2 r \tag{2.39}$$

と近似的（現象論的）に書かれることがしばしばある．弱い力の媒介粒子は 3 種あり，電荷をもつ $W^{\pm}$ 粒子は約 80 GeV/c^2，中性の Z^0 粒子は約 90 GeV/c^2 の質量をもつ．これから，弱い力の到達距離は約 10^{-16} cm とわかる．

演習 2.3 W 粒子の質量 80 GeV/c^2 より，弱い力の到達距離を求めよ．

演習 2.4 星と電波の偏光の観測から，わが銀河系内には約 3 マイクロガウスの弱い磁場がコヒーレントに存在していることが知られている．このことから，電磁力の到達距離は少なくも数万光年あることがわかる．これからフォトンの質量の上限値を求めよ．

2.3 ローレンツ変換

2.3.1 ローレンツベクトル

高エネルギー物理学現象ではほとんどすべての場合，$E \approx pc \gg mc^2$ が成立するから特殊相対論は不可欠の道具となる．一番の特徴は，時間と空間はもはや独立ではなく互いに混合するということである．したがって物理量もこれまでは独立であった空間の3成分と，非相対論ではスカラーとして扱われた時間成分とをまとめて4次元ベクトルに統合しなければならない．特殊相対性理論によれば，ある座標系 L で測った現象の時間と位置（以下時空の座標という）が $(t;x,y,z)$ であるとき，この座標系 L に対し，$t=0$ で L に一致し，x 方向に速度 v で動いている座標系 L' で測った時空座標 $(t';x',y',z')$ は，

$$t'=\frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad y'=y, \quad z'=z \tag{2.40 a}$$

で与えられ，このような変換を（固有）ローレンツ変換またはローレンツブーストという．後の便宜のために，

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1=x, \quad x^2=y, \quad x^3=z \tag{2.41 a}$$

$$\beta \equiv v/c, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{2.41 b}$$

を定義すると，上の式は

$$x'^0=\gamma(x^0-\beta x^1), \quad x'^1=\gamma(-\beta x^0+x^1), \quad x'^2=x^2, \quad x'^3=x^3 \tag{2.40 b}$$

となる．これを

$$x'^\mu=\sum_{\nu=0}^{3} L^\mu{}_\nu x^\nu \equiv L^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.40 c}$$

と書く．以下，このようにギリシャ文字が上付きと下付きの両方の添え字に現れたときは，0から3までの和をとるものとし，ラテン文字（アルファベット）が，上下にもしくは並んで現れたときは，3次元的に1から3までの和をとると約束する（縮約；contraction）．行列表示で，$\boldsymbol{x}$ は列ベクトルを表すものとすると

$$\boldsymbol{x}' \equiv \begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{L}\boldsymbol{x} \qquad (2.40\,\mathrm{d})$$

ローレンツ変換は光速度不変の原理から導かれたものであり，$\mathrm{d}s^2 \equiv (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2$ を不変にするすべての線形変換と定義できる．いま

$$\mathrm{d}x^\mu \equiv (\mathrm{d}x^0; \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3) \qquad (2.42\,\mathrm{a})$$

$$\mathrm{d}x_\mu \equiv (\mathrm{d}x_0; \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3) \equiv (\mathrm{d}x^0; -\mathrm{d}x^1, -\mathrm{d}x^2, -\mathrm{d}x^3) \qquad (2.42\,\mathrm{b})$$

$$\boldsymbol{G} \equiv [g_{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}^{-1} \equiv [g^{\mu\nu}] \qquad (2.42\,\mathrm{c})$$

なる指標が上付きと下付きのベクトルとテンソル（計量テンソル）を定義すると，

$$\mathrm{d}x_\mu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu \qquad (2.43\,\mathrm{a})$$

$$g^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu \qquad (2.43\,\mathrm{b})$$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g^{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu = \mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu \qquad (2.43\,\mathrm{c})$$

が成立する．$\mathrm{d}x_\mu$ の変換性は

$$\mathrm{d}x'_\mu = \mathrm{d}x_\nu M^\nu{}_\mu, \quad (\text{または} \quad \boldsymbol{dx}'^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{dx}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}) \qquad (2.44\,\mathrm{a})$$

とおいて，$\mathrm{d}s^2$ がローレンツ不変量であることを使うと，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x'_\mu\mathrm{d}x'^\mu = \mathrm{d}x_\nu M^\nu{}_\mu L^\mu{}_\rho\mathrm{d}x^\rho = \mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu \\ &= \mathrm{d}x_\nu\delta^\nu{}_\rho\mathrm{d}x^\rho \end{aligned}$$

$$\therefore \quad M^\nu{}_\mu = [\boldsymbol{L}^{-1}]^\nu{}_\mu \qquad (2.44\,\mathrm{b})$$

一般に座標もしくは $\mathrm{d}x^\mu$ のように変換する（すなわち式 (2.40 a) に従う）ベクトルを**反変ベクトル**といい，A^μ のように上付きの添え字をつけて表す．一方 $\mathrm{d}x_\mu$ のように変換するベクトルを**共変ベクトル**といい，B_μ のように下付きの添え字をつけて表す．反変ベクトルと共変ベクトルは計量テンソルによって互いに変換できる．

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu, \qquad A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu \qquad (2.45\,\mathrm{a})$$

成分で書くと，

$$A_0=A^0,\quad A_1=-A^1,\quad A_2=-A^2,\quad A_3=-A^3 \qquad (2.45\,\mathrm{b})$$

の関係にある．下に種々のベクトルの例を示す．微分演算子ベクトルの符号に注意せよ．

反変ベクトルの例	共変ベクトルの例	
$\mathrm{d}x^\mu=(c\mathrm{d}t;\mathrm{d}\boldsymbol{x})$	$\mathrm{d}x_\mu=(c\mathrm{d}t;-\mathrm{d}\boldsymbol{x})$	座標微分
$w^\mu=\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau=(c\gamma;\gamma\boldsymbol{v})$	$w_\mu=\mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}\tau=(c\gamma;-\gamma\boldsymbol{v})$	速度ベクトル
$p^\mu=mw^\mu=(E/c;\boldsymbol{p})$	$p_\mu=(E/c;-\boldsymbol{p})$	エネルギー運動量
$\partial^\mu=\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x^0};-\nabla\right)$	$\partial_\mu=\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x^0};\nabla\right)$	微分演算子
$k^\mu=(\omega/c;\boldsymbol{k})$	$k_\mu=(\omega/c;-\boldsymbol{k})$	波数ベクトル
$j^\mu=(\rho c;\boldsymbol{j})$	$j_\mu=(\rho c;-\boldsymbol{j})$	電荷密度，電流
$A^\mu=(\phi/c;\boldsymbol{A})$	$A_\mu=(\phi/c;-\boldsymbol{A})$	電磁場ポテンシャル

ただし，$\mathrm{d}\tau\equiv\mathrm{d}t[1-(1/c^2)\{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2\}]^{1/2}$ は，固有時でありローレンツ不変量である．

演習 2.5　座標が，式 (2.40 a) に従って変換することを使い，微分演算子が共変ベクトルであることを証明せよ．

ヒント：$\delta^\mu{}_\nu=\partial x^\mu/\partial x^\nu=(\partial x^\mu/\partial x'^\rho)(\partial x'^\rho/\partial x^\nu)$ を使え．

2.3.2　ローレンツスカラー

任意の反変ベクトル A^μ および共変ベクトル B_μ について，

$$(A\cdot B)\equiv A^\mu B_\mu=A_\mu B^\mu=A^0B^0-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (2.46)$$

は，ローレンツ変換で不変なこと，すなわち，ローレンツスカラーであることが示せる．

演習 2.6　上の記述を証明せよ．

演習 2.7　A^μ がローレンツベクトルであり，$A^\mu B_\mu$ がローレンツ不変であるとき，B^μ もまたローレンツベクトルであることを示せ．

ローレンツスカラーの特別な場合として，$(A\cdot B)$ で，$A=B$ とおいた量，すなわち $A^2\equiv(A\cdot A)=A^0A^0-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ がある．

ローレンツスカラーの例

$$(mc)^2 \equiv p^2 \equiv p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - \boldsymbol{p}^2$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2 = -\Box \quad \text{（ダランベルシァン）}$$

$$kx \equiv k^\mu x_\mu = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} \quad \text{（波の位相）}$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{（電荷保存の式）}$$

$$\mathrm{d}^4 x \equiv \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 p}{E/c} = \frac{\mathrm{d}p^1 \mathrm{d}p^2 \mathrm{d}p^3}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + (mc)^2}}$$

演習 2.8 上記最後の2式がローレンツ不変量であることを証明せよ．

ヒント：ジャコビアンを使うか，ローレンツ不変量 $\mathrm{d}^4 p \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)$ を変形せよ．ただし $\theta(x)$ は $x>0$ のとき1, $x<0$ のとき0となるステップ関数である．

2.3.3 空間反転と時間反転

ローレンツ変換は，$\mathrm{d}s^2$ を不変にするすべての線形変換であるから

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu$$
$$= g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu L^\sigma{}_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$
$$\therefore \quad g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu L^\sigma{}_\nu \tag{2.47 a}$$

これは，

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{L} \tag{2.47 b}$$

と書けるから，左から $\boldsymbol{G}^{-1}$ を掛けると

$$\boldsymbol{1} = \boldsymbol{G}^{-1} \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{L} = [\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}\boldsymbol{G}^{-1}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{L}^{-1} = [\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}\boldsymbol{G}^{-1}]^{\mathrm{T}} \tag{2.48}$$

ここで，$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}$，$[\boldsymbol{G}^{-1}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}^{-1}$ を使った．これから，

$$\det \boldsymbol{L}^{-1} = \det \boldsymbol{G} \cdot \det \boldsymbol{L} \cdot \det \boldsymbol{G}^{-1}$$

であるから，$\det \boldsymbol{L}^{-1} = 1/\det \boldsymbol{L}$ を使えば

$$\det \boldsymbol{L} = \pm 1 \tag{2.49}$$

すなわち，ローレンツ変換には，行列式が1になる変換と，-1 になる変換の両方が存在する．

また，(2.47 a) で，$\mu=\nu=0$ 成分を考えると

$$1=(L^0{}_0)^2-\sum(L^i{}_0)^2 \tag{2.50 a}$$

であるので

$$\therefore \quad |L^0{}_0|>1 \tag{2.50 b}$$

$L^0{}_0>1$ のとき，変換は時間の向きを変えない (ortho-chronous) といい，$L^0{}_0<-1$ のとき，変換は時間の向きを変える (non-orthochronous) という．

$\det\boldsymbol{L}$ と $L^0{}_0$ の符号によりローレンツ変換は 4 種に分類でき，$\det\boldsymbol{L}>0$, $L^0{}_0>0$ の変換を固有ローレンツ変換という．

固有ローレンツ変換は，変換のパラメターが 0 の極限で無変換，すなわち $\boldsymbol{L}=\mathbf{1}$ に連続につながる変換のことである．これには，(2.40) のような速度をパラメターとする変換のほかに，回転角をパラメターとする 3 次元空間回転を含む．$\boldsymbol{R}$ を 3 次元の回転行列とすれば，次のように表される．

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boldsymbol{R} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{2.51 a}$$

任意の固有ローレンツ変換を $\boldsymbol{L}_{\mathrm{P}}$ で表し，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{PT}$ を

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{PT}\equiv\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.51 b}$$

とおくと，$\det\boldsymbol{P}=\det\boldsymbol{T}=-1$, $\det\boldsymbol{L}_{\mathrm{P}}=\det(\boldsymbol{PT})=1$ である．上の 4 つの変換のうち，連続パラメター $\boldsymbol{v}$ または $\boldsymbol{\theta}$ (速度 v と回転角 θ は方向性をもたせると $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}$ となる．$\boldsymbol{\theta}$ の方向は回転軸の方向である．したがって独立なパラメターの数は 6 個ある）が無限小の極限で，無変換すなわち行列が $\mathbf{1}$ に近づくのは固有ローレンツ変換 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{P}}$ のみである．任意のローレンツ変換はこの四つの組み合わせで得られる．$\boldsymbol{P}$ は空間反転またはパリティ変換と呼ばれ，$\boldsymbol{T}$ は時間反転と呼ばれる．$\boldsymbol{PT}$ は全反転である．

2.3.4 速度の合成則

L' 系で速度 v' で運動しているものを，L 系でみて v'' になるものとする．L' 系の量を L 系に変換するには，(2.40 b) で，$\beta\to-\beta$ とおけばよい．

$$\therefore\quad \begin{aligned} x^0&=\gamma(x'^0+\beta x'^1)\\ x^1&=\gamma(\beta x'^0+x'^1) \\ \beta'&=\frac{v'}{c}=\frac{\mathrm{d}x'^1}{\mathrm{d}x'^0}\end{aligned} \tag{2.52}$$

であるから，

$$\beta''=\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}x^0}=\frac{\gamma(\beta\mathrm{d}x'^0+\mathrm{d}x'^1)}{\gamma(\mathrm{d}x'^0+\beta\mathrm{d}x'^1)}=\frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'} \tag{2.53}$$

$\beta<1$, $\beta'<1$ ならば β'' が 1 より大きくなることはない．なぜなら

$$1-\beta''=\frac{1+\beta\beta'-(\beta+\beta')}{1+\beta\beta'}=\frac{(1-\beta)(1-\beta')}{1+\beta\beta'}>0$$

(2.53) 式からわかるように，速度はローレンツ変換に関して加算的ではない．そこで，ラピディティ (rapidity) η という量を次のように定義すると

$$\eta=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \tag{2.54}$$

η の変換式は，

$$\begin{aligned}\eta''&=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta''}{1-\beta''}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+(\beta+\beta')/(1+\beta\beta')}{1-(\beta+\beta')/(1+\beta\beta')}=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\beta)(1+\beta')}{(1-\beta)(1-\beta')}\\ &=\eta+\eta'\end{aligned} \tag{2.55}$$

となる．すなわち η はローレンツ変換に対して加算的であるので，η をパラメターとするローレンツ変換は，$\Delta\eta=\eta/N$ の微小ローレンツ変換を N 回繰り返すことによって達成できる．β,γ を η について解くと

$$\beta=\frac{\exp(2\eta)-1}{\exp(2\eta)+1}=\tanh\eta,\qquad \gamma=\cosh\eta \tag{2.56}$$

となるので，(2.40) は

$$\begin{aligned} x'^0&=\quad\cosh\eta\cdot x^0-\sinh\eta\cdot x^1\\ x'^1&=-\sinh\eta\cdot x^0+\cosh\eta\cdot x^1\end{aligned} \tag{2.57}$$

これは，3 次元回転

$$\begin{aligned} x'&=\quad x\cos\theta+y\sin\theta\\ y'&=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{aligned} \tag{2.58}$$

において，$\theta \to -i\eta$, $x \to ix^0$, $y \to x^1$ とおけば得られるので，ローレンツ変換（x 軸方向のブースト）は，形式的には x 軸と虚軸 x^0 との間の $-i\eta$ 角だけの回転と解釈できる．

衝突型加速器で高エネルギー衝突反応における終状態粒子の角分布は，z 軸（入射ビーム軸）方向にブーストされるので，放出角 θ の代わりにラピディティ η を使うと $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\eta$ がほぼ一定になる（実験事実）．この事実は測定器設計の際の重要な要素となる．高エネルギーでは各粒子について，$E \sim pc$, $p_{/\!/} = p\cos\theta$ であるので，粒子のもつラピディティ η は，近似的に次式の疑似ラピディティで表される．

$$\eta' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta_{/\!/}}{1-\beta_{/\!/}}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_{/\!/}c}{E-p_{/\!/}c} \sim -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) \qquad (2.59)$$

2.3.5 ローレンツ演算子

量子力学の波動関数に対するローレンツ変換演算子を求めるために，スカラー関数の微小ローレンツ変換（ラピディティ $\Delta\eta$ が微小量）を考える．スカラー関数はローレンツ変換で不変であるので，

$$\psi(x) \xrightarrow{L} \psi'(x') = \psi(x), \quad x' = Lx \qquad (2.60\,\mathrm{a})$$

$$x'^0 = x^0 - \Delta\eta x^1, \qquad x'^1 = x^1 - \Delta\eta x^0 \qquad (2.60\,\mathrm{b})$$

に対して，x' を改めて x とおくと

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \psi(L^{-1}x) = \psi(x^0 + \Delta\eta x^1, x^1 + \Delta\eta x^0) \\ &= \psi(x^0, x^1) + \Delta\eta(x^1\partial_0\psi + x^0\partial_1\psi) \equiv (1 - i\Delta\eta N_1)\psi(x) \qquad (2.61\,\mathrm{a})\end{aligned}$$

有限のローレンツブーストは，$\Delta\eta = \eta/N$ を N 回繰り返せばよいから

$$\psi'(x) = \lim_{N\to\infty}[1 - i(\eta/N)N_1]^N\psi(x) = \exp(-i\eta N_1)\psi(x) \qquad (2.61\,\mathrm{b})$$

ここに，N_1 は次式で定義される演算子である．

$$N_1 = i(x^0\partial_1 + x^1\partial_0) = i(x_0\partial_1 - x_1\partial_0) \qquad (2.62\,\mathrm{a})$$

同様に

$$N_2 = i(x_0\partial_2 - x_2\partial_0) \qquad (2.62\,\mathrm{b})$$

$$N_3 = i(x_0\partial_3 - x_3\partial_0) \qquad (2.62\,\mathrm{c})$$

を定義する．一方，軌道角運動量演算子は

$$L_i = -i(x^j\partial_k - x^k\partial_j) = i(x_j\partial_k - x_k\partial_j)$$

と書ける．N_i と L_j の間には，次の交換関係

$$[L_i, L_j]=i\varepsilon_{ijk}L_k \tag{2.63 a}$$

$$[N_i, N_j]=-i\varepsilon_{ijk}L_k \tag{2.63 b}$$

$$[N_i, L_j]=i\varepsilon_{ijk}N_k \tag{2.63 c}$$

が成立する．一般の角運動量 $J=L+S$ が L と同じ交換関係を満たすように，スピン演算を含む一般のローレンツブースト演算子も同じ交換関係 (2.63) を満たすはずである．ここで，ローレンツ演算子 $M_{\mu\nu}$，ローレンツ変数 $\omega^{\mu\nu}$ を次のように定義すると

$$\begin{aligned}
&M_{\mu\nu}=i(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)+S_{\mu\nu}\\
&M_{\mu\nu}=-M_{\nu\mu},\qquad \omega^{\mu\nu}=-\omega^{\nu\mu}\\
&(\omega^{23}, \omega^{31}, \omega^{12})=(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\\
&(\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03})=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\\
&(M_{23}, M_{31}, M_{12})=(L_1, L_2, L_3)\\
&(M_{01}, M_{02}, M_{03})=(N_1, N_2, N_3)
\end{aligned} \tag{2.64}$$

回転とブーストを含む一般のローレンツ変換演算子は

$$\exp(-i(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\eta})-i(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\theta}))=\exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right) \tag{2.65}$$

と表せる．2 次元スピノール空間*3) では，

$$M_{ij}=S_{ij}=\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2},\qquad M_{0k}=S_{0k}=i\frac{\sigma_k}{2} \tag{2.66}$$

はこれらの関係を満たす．

演習 2.9　(2.66) で定義される M_{ij} が，ローレンツ演算子としての必要条件の交換関係 (2.63) を満たすことを示せ．

演習 2.10*　(2.57)，(2.58) から，微小変換については，固有ローレンツ変換は一般に

$$L^\mu{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu+\varepsilon^\mu{}_\nu \tag{2.67 a}$$

$$\varepsilon^\mu{}_\nu=\begin{bmatrix} 0 & -\delta\eta_1 & -\delta\eta_2 & -\delta\eta_3\\ -\delta\eta_1 & 0 & \delta\theta_3 & -\delta\theta_2\\ -\delta\eta_2 & -\delta\theta_3 & 0 & \delta\theta_1\\ -\delta\eta_3 & \delta\theta_2 & -\delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.67 b}$$

と書けることを示せ．したがって

---

*3)　$A^\mu=\chi^\dagger\sigma^\mu\chi$ が，ローレンツベクトルであるとき，χ を 2 次元スピノールという．ただし，$\sigma^\mu=(\sigma^0;\boldsymbol{\sigma})$，$\sigma^0=1$ である．

$$\varepsilon^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\rho}\varepsilon^{\nu}{}_{\rho} = -\varepsilon^{\nu\mu} \tag{2.67 c}$$

の関係にあることを示せ.

2.3.6 共 変 形 式

テンソル　二つのベクトルの積 $A^\mu B^\nu$ は，ローレンツ変換によって，

$$A'^\mu B'^\nu = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma A^\rho B^\sigma \tag{2.68}$$

のように変換する．一般に $4\times4=16$ 個の成分をもち，上記のような変換をする量 $T^{\mu\nu}$ を 2 階の反変テンソルという．同様に 2 階の共変テンソル，混合テンソルが定義できる．さらに拡張して，

$$A^\mu B^\nu \cdots\cdots P_\rho Q_\sigma \cdots\cdots \qquad (\text{全部で } r \text{ 個})$$

のように変換する r 階のテンソルが定義できる．r 階の混合テンソル $T^{\mu\nu\cdots}{}_{\rho\sigma\cdots}$ について，上付きの添え字と下付きの添え字を同じにして和をとったもの $T^{\mu\nu\cdots}{}_{\mu\sigma\cdots}$ は，変換性が，$A^\mu B^\nu \cdots C_\mu D_\sigma \cdots$ と同じである．$A^\mu C_\mu$ はローレンツスカラーであるから，μ 指標についてはローレンツ不変となる．したがって，変換性は $B^\nu \cdots D_\sigma \cdots$ と同等であり，反変添え字，共変添え字の数がそれぞれ 1 ずつ減り，全体として $r-2$ 階のテンソルとなる．

$$\underset{(r\text{階})}{T^{\mu\nu\cdots}{}_{\rho\sigma\cdots}} \longrightarrow \underset{(r-2\text{ 階})}{T^{\mu\nu\cdots}{}_{\mu\sigma\cdots}}$$

また，$g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ を使えば，

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu\rho\sigma\cdots}, \qquad g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma\cdots}$$

によって，反変テンソル，共変テンソルのランクを 2 下げることが可能である．

演習 2.11　次式で定義されるレヴィチヴィタテンソル $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は，4 階の共変テンソルであることを示せ．同様に $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は反変テンソルである．

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} \pm1, & \mu\nu\rho\sigma=0123 \text{ の偶（奇）置換のとき,} \\ 0, & \mu\nu\rho\sigma \text{ のどれか二つが等しいとき} \end{cases}$$

$$\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$$

こうしたローレンツ変換するベクトルまたはテンソルを，一般にローレンツベクトルまたはローレンツテンソルという．アインシュタインの特殊相対論は，すべての物理法則は座標系によらず同じ形をとるという要請をおくことに

等しい．すなわち

$$A^{\mu}=B^{\mu},\quad \text{または}\quad A^{\mu\nu}=B^{\mu\nu}$$

のように，ローレンツテンソルで書かれていなければならないということである．この方程式の両辺の値はローレンツ変換によって変わるが，この式の形は変わらない．これをローレンツ共変という（先に出た“ローレンツ不変＝ローレンツ変換で値が変わらない”との差に注意）．

後のためにマクスウェルの方程式がローレンツ共変であることを示そう．電磁ポテンシャル A^{ν} がローレンツベクトルであることは，A の満たす方程式を見ればわかる．なぜなら，$j^{\mu}=(\rho c;\boldsymbol{j})$, $A^{\mu}=(\phi/c;\boldsymbol{A})$ を導入すれば，(2.32) はまとめて，$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}=\mu_0 ej^{\nu}$ と書けるが，右辺はベクトルである．$\partial_{\mu}\partial^{\mu}$ はスカラーであるので，A^{ν} はベクトルでなければならない．微分ベクトル ∂^{μ} もローレンツベクトルであるから，ベクトルポテンシャルとの積は 2 階のテンソルである．いま 2 階の反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ を

$$F^{\mu\nu}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu} \tag{2.69}$$

で定義すると，電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{B}$ はそれぞれ

$$F^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0, & -E_1/c, & -E_2/c, & -E_3/c \\ E_1/c, & 0, & -B_3, & B_2 \\ E_2/c, & B_3, & 0, & -B_1 \\ E_3/c, & -B_2, & B_1, & 0 \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

のように $F^{\mu\nu}$ の成分として表されることがわかる．つまり電場と磁場は見かけ上は 2 個の独立なベクトルのようであるが，実は一つの 2 階のテンソルの異なった成分であることがわかる．この $F^{\mu\nu}$ を使うと，マクスウェルの方程式のうち，電荷密度 ρ, 電流密度 $\boldsymbol{j}$ を含む式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=q\rho/\varepsilon_0,\qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0 q\boldsymbol{j} \tag{2.71}$$

はまとめて，

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=\mu_0 qj^{\nu} \tag{2.72}$$

と書ける．この式は，$A^{\mu}=B^{\mu}$ の形をしている．源を含まない式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0,\qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \tag{2.73}$$

は,

$$F_{\mu\nu}=g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma} \tag{2.74}$$

を使って,

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0 \tag{2.75}$$

と書き直せて，やはりテンソル式となっているが，$F_{\mu\nu}$ の定義からこれは恒等式である．つまり (2.73) の 2 つのマクスウェルの式は，ポテンシャル A^μ がローレンツベクトルであるということと同等である．これでマクスウェルの方程式が完全にローレンツ共変であることが示されたが，歴史的には逆で，まずマクスウェル方程式を共変にするようにローレンツ変換が導かれ，ローレンツ変換の背後にある物理的意味を洞察することによって，特殊相対性原理に到達したのであった．

2.4 自 然 単 位

われわれが通常使用する物理量は，長さ L にメートル (m)，質量 M にキログラム (kg)，時間 T に秒 (sec) を使う MKS 単位系によって,

$$\mathrm{L}^a\mathrm{M}^b\mathrm{T}^c \tag{2.76}$$

を単位として表される．例えば速度 v は，次元

$$[v]=\mathrm{LT}^{-1}=\mathrm{m/sec} \tag{2.77 a}$$

をもつ．同様に，加速度 a，力 f，エネルギー E の次元はそれぞれ,

$$[a]=\mathrm{LT}^{-2}=\mathrm{m/sec}^2 \tag{2.77 b}$$

$$[f]=\mathrm{MLT}^{-2}=\mathrm{kg\cdot m/sec}^2\equiv\text{ニュートン} \tag{2.77 c}$$

$$[E]=\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}=\mathrm{kg\cdot m}^2/\mathrm{sec}^2\equiv\text{ジュール} \tag{2.77 d}$$

と表される．すべての物理量はこのように MLT の三つの基本量から組み立てられる．しかし基本量として，必ずしも MLT にこだわる必要はなく，任意の独立な三つの物理量から出発しても差し支えはない．さらに，素粒子の世界では MKS の単位は大きすぎて適当でない．そこで基本量の 1 つとしてエネルギーを選び，単位としては，電子または陽子 1 個を 1 ボルトの電圧で加速したときに得られるエネルギーを 1 電子ボルト (eV) として使用する．電子や陽子 1 個のもつ電荷は 1.6021×10^{-19} クーロンであるから,

$$1\,\mathrm{eV}=1.6021\times10^{-19}\quad \text{クーロン・ボルト}$$
$$=1.6021\times10^{-19}\quad \text{ジュール} \tag{2.78}$$

である．さらに

$$1\,\mathrm{KeV}=10^{3}\,\mathrm{eV}$$
$$1\,\mathrm{MeV}=10^{6}\,\mathrm{eV}$$
$$1\,\mathrm{GeV}=10^{9}\,\mathrm{eV}$$
$$1\,\mathrm{TeV}=10^{12}\,\mathrm{eV} \tag{2.79}$$

がその延長として定義され，扱う現象のエネルギーレベルに応じて使い分ける．さしあたってここでは MeV を採用する．

量子論や，相対論では，プランクの定数を 2π で割った $\hbar=h/2\pi$ や光速 c がしばしば現れるので，エネルギーに加えて，この二つを基本単位に選ぶと便利なことが多い．

$$\hbar=1.055\times10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot sec}=6.582\times10^{-22}\,\mathrm{MeV\cdot sec}$$
$$\hbar c=\qquad 1.9733\times10^{-11}\,\mathrm{MeV\cdot cm} \tag{2.80}$$

であるから，

$$[\mathrm{L}]=[\hbar c]\times[E^{-1}]$$
$$[\mathrm{T}]=[\hbar]\times[E^{-1}] \tag{2.81}$$

すなわち，長さは 1.9733×10^{-11} cm を単位として，エネルギーの逆数で測られる．時間は 6.582×10^{-22} 秒を単位としてやはりエネルギーの逆数で表されることになる．そこで，$\hbar=c=\hbar c=1$ とおけば，式の中から $\hbar$ と c が消え，かつすべての物理量がエネルギーを単位として表されて著しく簡単となる．例えば，速度は，c を単位として無次元の量となる．質量は，c^2 を掛けるとエネルギーになり，運動量 p は Ev/c^2 であるのでともに MeV で表されるが，特にエネルギーと区別するために，それぞれ単位を MeV/c^2, MeV/c と明記することもある．

自然単位の量から通常の単位に戻すには，上記の $\hbar$ と $\hbar c$ を使って次元を合わせればよい．例えば，π 中間子の質量エネルギー μ は 140 MeV であるが，長さが μ 分の 1 というときの cm で表した量は，

$$\frac{1}{\mu}=\frac{\hbar c(\mathrm{MeV\cdot cm})}{140\,\mathrm{MeV}}=\frac{1.97\times10^{-11}\,\mathrm{cm}}{140}=1.4\times10^{-13}\,\mathrm{cm} \tag{2.82}$$

時間が，μ 分の 1 というときは，

$$\frac{1}{\mu}=\frac{\hbar(\mathrm{MeV\cdot sec})}{140\ \mathrm{MeV}}=\frac{6.58\times10^{-22}\ \mathrm{sec}}{140}=4.7\times10^{-24}\ \mathrm{sec} \qquad (2.83)$$

断面積 σ が，$(m_{\mathrm{p}})^{-2}$ というときは $(m_{\mathrm{p}}=0.938\ \mathrm{GeV})$，

$$\sigma=\frac{1}{m_{\mathrm{p}}{}^2}=\frac{(\hbar c)^2}{(m_{\mathrm{p}}c^2)^2}=\left\{\frac{1.97\times10^{-11}(\mathrm{MeV\cdot cm})}{938\ \mathrm{MeV}}\right\}^2=4.4\times10^{-28}\ \mathrm{cm}^2 \qquad (2.84)$$

などである．

演習 2.12 電子の古典半径 $r_{\mathrm{e}}=\alpha/m_{\mathrm{e}}$ を計算せよ．ただし，m_{e} は電子の質量で，0.511 MeV である．

演習 2.13 2 種類の質量の異なる ν_1, ν_2 が存在して

$$|\nu_1(t)\rangle=|\nu_1(0)\rangle e^{-iE_1t} \qquad (2.85\ \mathrm{a})$$

$$E_1=\sqrt{p^2+m_1{}^2}\simeq p+\frac{m_1{}^2}{2p} \qquad (2.85\ \mathrm{b})$$

ν_{e}, ν_μ がその混合状態であるとする．すなわち

$$|\nu_{\mathrm{e}}\rangle=\cos\theta|\nu_1\rangle+\sin\theta|\nu_2\rangle \qquad (2.86\ \mathrm{a})$$

$$|\nu_\mu\rangle=-\sin\theta|\nu_1\rangle+\cos\theta|\nu_2\rangle \qquad (2.86\ \mathrm{b})$$

と書けるとき，時刻 $t=0$ で純粋な ν_{e} 状態であったニュートリノは時刻 t には確率

$$p(\nu_{\mathrm{e}}\to\nu_\mu:t)=|\langle\nu_\mu|\nu_{\mathrm{e}}(t)\rangle|^2=\sin^2 2\theta\sin^2\frac{m_1{}^2-m_2{}^2}{2p}t \qquad (2.87)$$

で ν_μ 状態になることを示せ．この現象をニュートリノ振動と呼ぶ．

ニュートリノの振動波長 λ は，ニュートリノの質量の自乗差 $\delta m^2=m_1{}^2-m_2{}^2$，運動量 p として，

$$\lambda=\frac{4\pi p}{\delta m^2}$$

で与えられる．δm^2 を $(\mathrm{eV})^2$ で，p を MeV/c で，λ を m（メートル）で計ったとき，

$$\lambda=2.4\times\frac{p}{\delta m^2}$$

で与えられることを示せ．

ここまでは，電磁気では有理化 MKS 単位を使ってきたが，これからは，$\mu_0=\varepsilon_0=1$ とおくヘビサイド-ローレンツ (Heaviside-Lorentz) 単位を使い，また MKS 単位の代わりに自然単位を使用することにする．

3
ディラック方程式

3.1 シュレーディンガー方程式の相対論化

3.1.1 ディラック行列

高エネルギー物理学で取り扱う粒子は，ほとんどの場合エネルギーと運動量が質量に比べ圧倒的に大きいので相対論的に扱わねばならず，量子力学の波動方程式も相対論に適合させねばならない．この場合，相対論的方程式のクライン-ゴルドン (Klein-Gordon)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \tag{3.1}$$

が出発点になるであろう．しかし，この ϕ をシュレーディンガー方程式の波動関数と同じように確率振幅と解釈したのでは，負エネルギー解と負の確率という二つの困難に遭遇する．§2 ではこの ϕ を古典的波動場と再解釈し，再度量子化することにより困難が避けられることを議論した．特に強調しておきたいことは，量子化された粒子の現象を相対論的に扱うと負のエネルギー状態とそれに伴って，1 体問題から多体問題への移行が相対論の必然的な結果として導かれるということである．このことは第 5 章で取り扱う．歴史的には 1 体の波動関数方程式という枠内で両方の困難を解消しようとして，ディラック (Dirac) は次のように考えた．

1) 負の確率がでるのは，波動方程式が時間微分で 2 階であったからである．したがって，正しい方程式は時間微分で 1 階でなければならず，ローレンツ共変性を要求すると，空間微分もまた 1 階でなければならない．

2) 空間微分の回数を減らした分，ϕ は多成分の ψ_r, $r = 1, 2, \cdots$ になるであろう．この場合

$$\rho=\sum\psi^*{}_r\psi_r\equiv\psi^\dagger\psi \tag{3.2 a}$$

とすれば，ρ は負にならない．
ここで

$$\psi=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{3.2 b}$$

という列ベクトルを導入した．

これは，例えば $\partial^2 q/\partial t^2=-\omega^2 q$ のような簡単な 2 階微分方程式を考えてみればよい．$q_1=q$，$q_2=\partial q/\partial t$ を導入することによって，$\partial q_1/\partial t=q_2$，$\partial q_2/\partial t=-\omega^2 q_1$ の 2 個の連立 1 階微分方程式となる．次に行列の導入により一つの線形微分方程式にまとめられる．

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=H\psi,\quad \psi=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix},\qquad H=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}$$

3)　相対論的なクライン-ゴルドン方程式は満たさなければならない．

1)，2) の考えを適用してシュレーディンガー方程式をつくってみると

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\psi=\left(\sum_i\alpha_i\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\beta m\right)\psi \tag{3.3}$$

ここで ψ は多成分であるから列ベクトルで表され，$\boldsymbol{\alpha},\beta$ は行列となる．$\boldsymbol{p}$ は微分演算子であるが，以下特に混乱が生じる場合を除いて，$p^\mu\leftrightarrow i\partial^\mu$ を自由に使い分けるものとする．そうすると，(3.3) のハミルトニアンは

$$E\psi=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\psi \tag{3.4}$$

と書けるから，3) の要請によって，

$$\begin{aligned}E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2&=\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i+\beta m\right)\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j p_j+\beta m\right)\\ &=\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i{}^2 p_i{}^2+\beta^2 m^2\right)+\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j p_i p_j+\sum_{i=1}^{3}(\beta\alpha_i+\alpha_i\beta)p_i m\end{aligned} \tag{3.5}$$

これより $\boldsymbol{\alpha},\beta$ の満たすべき条件が導ける．

$$\begin{aligned}&\alpha_i{}^2=\beta^2=1\\ &\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=\alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.6) を満たす行列をディラック行列と呼び，最低 4 次元でなければならない．

証明：(a)　α_i, β の固有値は ±1 である．

$$\alpha_i\psi=\lambda\psi \longrightarrow \alpha_i{}^2\psi=\psi=\lambda^2\psi \qquad \therefore \quad \lambda=\pm 1$$

(b)　α_i, β は無軌跡 (traceless；トレースレス) である．

$$\mathrm{Tr}(\alpha_i)=\mathrm{Tr}(\alpha_i\beta^2)=\mathrm{Tr}(\beta\alpha_i\beta)=-\mathrm{Tr}(\alpha_i\beta^2)=-\mathrm{Tr}(\alpha_i)$$

ここでトレースは巡回置換で変わらないことと (3.6) の関係式を利用した．(a), (b) を満たす条件から $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は偶数次元をもたなければならないことがいえる．最小の偶数は 2 であり，2×2 の行列で (3.6) の関係を満たすものとしてパウリの行列

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{3.7}$$

があるが，独立な行列は単位行列 **1** のほかはこれでつきており，4 個の独立な行列で，(3.6) を満たすものとしては 4×4 が最低限必要となる．また，4×4 行列ならば (3.6) を満たすような 4 個の行列 α_i, β がつくれる ((3.9) 参照)．

(証明終わり)

$m=0$ のときは，β が不要なので 2×2 行列でよい．たとえば，α_i としてパウリ行列 σ_i もしくは $-\sigma_i$ を採用できる (後述 § 3.8「カイラル表示とワイル粒子」)．

ディラックの方程式の性質は，(3.6) の関係よりたいてい導けるが，具体的な計算には表示を明示しておいた方がわかりやすい．T をユニタリー行列とすると

$$\boldsymbol{\alpha}'=T^{-1}\boldsymbol{\alpha}T, \qquad \beta'=T^{-1}\beta T \tag{3.8}$$

のように変換したものもまた (3.6) を満たすからいろいろな表示があるが

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix}, \qquad \beta=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{3.9}$$

ととるパウリ-ディラックの表示がよく使われる．ただしここの 1, 0 は 2×2 行列を表すものとする．ここで上記の $\boldsymbol{\alpha}$ を使って，$\boldsymbol{j}(x)\equiv\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\alpha}\psi(x)$, $j^0=\rho\equiv\psi^\dagger(x)\psi(x)$ を定義すると，ディラックの式から，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t}&=\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi+\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t}=-i(-\psi^\dagger H^\dagger\psi+\psi^\dagger H\psi)\\ &=-i[-\{(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi\}^\dagger\psi+\psi^\dagger(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi]\\ &=-\nabla\cdot(\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi)=-\nabla\cdot\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{3.10}$$

となって連続の方程式を満たすことがわかる．ρ は常に ≥ 0 であるから確率密度としての条件は満たす．したがってどうやら，シュレーディンガー方程式の相対論的拡張というディラックの試みは成功したようにみえる．

演習 3.1 ハイゼンベルグの運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t}=i[H, O]$$

で，$O=\boldsymbol{x}$ とおくと，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{\alpha}$ となること，つまり $\boldsymbol{\alpha}$ は速度に対応する演算子とみなせることを示せ．

これから上記のカレントは，古典的には ρ, $\rho\boldsymbol{v}$ に対応することがわかる．

3.1.2 スピンとヘリシティ

ところで，ψ が 4 成分あるということはどのような自由度につながるのであろうか？ これをみるため，ψ が，

$$\psi(x)=u(p)\mathrm{e}^{ip\cdot x-iEt}\equiv u(p)\mathrm{e}^{-ipx}$$
$$-px=-p_\mu x^\mu=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et \tag{3.11}$$

のような平面波である場合を考えよう．このときハミルトニアンの中の p^μ は演算子でなく c 数（古典的な通常の数）となる．簡単のため $\boldsymbol{p}=0$, $E=m$ の場合を考えると，(3.4) は，

$$E\psi=m\beta\psi=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{bmatrix}\psi \tag{3.12}$$

となり，やはり負エネルギー状態は避けられないことがわかる．ところで正負エネルギー状態はそれぞれ 2 成分あるが，これは電子のスピン自由度に対応すると考えられる．(3.12) の固有関数は

$$w_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad w_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad w_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad w_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{3.13}$$

であり，2 次元のスピン演算子 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\sigma}/2$ を 4 次元に拡張した

$$\boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{\Sigma}/2, \qquad \boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

の Σ_3 は，確かに (3.13) を固有関数としてもち，固有値は $\pm 1/2$ である．

演習 3.2　$H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m$ は，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\times(-i\nabla)$ とは交換しないが，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Sigma}/2$ とは，交換することを示せ．

演習 3.3　(a)　$\Sigma_i \equiv -i\alpha_j\alpha_k$ (i, j, k は 1, 2, 3 の巡回置換) を示せ．

(b)　$\rho_1=-i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\rho_2=-\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\rho_3=\beta$ を定義すると

$$\rho_i\rho_j+\rho_j\rho_i=2\delta_{ij},\ [\rho_i, \rho_j]=2i\rho_k,\ [\Sigma_i, \rho_j]=0$$

が成立することを示せ．これから，$\boldsymbol{\Sigma}/2$, $\boldsymbol{\rho}/2$ はともに角運動量としての性質をもっていることがわかる．

ここで定義したスピン $\boldsymbol{s}$ は，

$$[s_i, s_j]=is_k \tag{3.15}$$

という交換関係を満たし，$\boldsymbol{s}^2=\boldsymbol{\Sigma}^2/4=3/4$ である．さらに $\boldsymbol{p}=0$ とおいたときの波動関数は $\boldsymbol{s}$ 演算子の固有状態であり，2 個の独立な成分をもっているなど，$\boldsymbol{s}$ は大きさが 1/2 の角運動量としてのすべての性質をもっている．スピン角運動量はよく粒子の自転の角運動量に比せられるが，回転という概念が意味をもつためには，広がりをもった質量分布が必要である．しかしそのような物体の回転から得られる角運動量は必ず整数値をもつ．スピン角運動量はディラック方程式の導き方からもわかるように広がりのない質点粒子でも相対論的な取扱いから必然的にでてくる量であり，しかも座標や運動量といった変数を含まないので，自転といったような解釈をそもそも受け付けない．相対論的粒子に付随する一つの性質として受け入れざるをえない．

相対論的取扱いでは固定した z 軸成分の代わりに，自身の運動方向を z 軸にとった場合のスピンの z 成分 (ヘリシティ) がよく使われる．ヘリシティ h は

$$h=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| \tag{3.16}$$

で定義され ± 1 の固有値をもつ．ヘリシティが正ということは右方向に回転しながら進むいわば右巻きのネジのような状態である．したがってヘリシティがプラスマイナスという代わりに右巻き左巻きという言葉もよく使われる．

演習 3.4　4成分ヘリシティ演算子：$h \equiv \dfrac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$ もまた，ディラックハミルトニアンと交換することを示せ．

演習 3.5　ヘリシティは，一般にはローレンツ不変量でないが，質量がゼロの粒子の場合はローレンツ不変量であることを示せ．

演習 3.6　$\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|=(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ とすると，h の固有状態 χ_r は次のように表されることを示せ．

$$\chi_+=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\exp(-i\phi/2)\\ \sin(\theta/2)\exp(i\phi/2)\end{bmatrix},\qquad \chi_-=\begin{bmatrix}-\sin(\theta/2)\exp(-i\phi/2)\\ \cos(\theta/2)\exp(i\phi/2)\end{bmatrix} \tag{3.17}$$

3.2 平 面 波 解

(3.11) の $\psi(x)\sim u(p)\mathrm{e}^{-ipx}$ における $u(p)$ を求めよう．$u_\mathrm{A}, u_\mathrm{B}$ を2次元の列ベクトルとして，

$$u\equiv\begin{bmatrix}u_\mathrm{A}\\ u_\mathrm{B}\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

のように分解して (3.4) に入れると，

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\psi \longrightarrow E\begin{bmatrix}u_\mathrm{A}\\ u_\mathrm{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_\mathrm{A}\\ u_\mathrm{B}\end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\therefore\quad (E-m)u_\mathrm{A}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}u_\mathrm{B}$$

$$(E+m)u_\mathrm{B}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}u_\mathrm{A} \tag{3.20}$$

非相対論の場合を考えると，$|E|-m, |\boldsymbol{p}|\ll|E|, m$ であるから，正エネルギー状態に対しては，

$$u_\mathrm{B}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|+m}u_\mathrm{A}\ll u_\mathrm{A} \tag{3.21}$$

負エネルギー状態に対しては，逆に $u_\mathrm{A}\ll u_\mathrm{B}$ となる．

$$\chi_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\qquad \chi_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{3.22}$$

という2次元でのスピン固有関数を定義するとまず $E>0$ の場合は，$\boldsymbol{p}\to 0$ の極限で (3.13) の解をもつことと，(3.21) から推察して，$u_\mathrm{A}=\chi_r$ とおき，

$$u_{\mathrm{B}}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|+m}\chi_r \longrightarrow u_r(p)=N\begin{bmatrix}\chi_r\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|+m}\chi_r\end{bmatrix},\qquad E>0 \tag{3.23 a}$$

と解ける．$E<0$ のときは，逆に $u_{\mathrm{B}}=\chi_r$ とおいて

$$u_{\mathrm{A}}=-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|+m}\chi_r \longrightarrow u_r(p)=N\begin{bmatrix}-\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|+m}\chi_r\\ \chi_r\end{bmatrix},\qquad E<0 \tag{3.23 b}$$

となる．N は規格定数である*1)．ここでの議論は簡単のため χ_r としてスピン固有関数を選んだが，上記の導き方から χ_r は実は独立な固有関数ならば何でもよい．例えば (3.17) のヘリシティ固有関数にとるやり方もよく使われる．

演習3.7　上の平面波解 $\psi(x)=u_s(p)\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-iEt)$ が，ディラックの方程式の固有値 $\pm E$ をもつ固有解であることをディラック方程式に実際に代入して確かめよ．

3.3　負エネルギー解の解釈

3.3.1　空　孔　理　論

ディラックはこの方程式を水素原子に適用し，従来説明不可能であった水素原子の微細構造を見事に説明した．また磁場中の電子に適用して，電子の磁気能率をも説明した (後述 3.4 節)．この大成功でディラックは，この方程式の正しさを確信したに違いない．しかるに負エネルギー解が避けられないとすれば，これに対する物理的解釈を施す必要がある．負エネルギーをもつ自由粒子という考え方は，前にも述べたように物理的解釈が困難である上に，正エネルギーの自由粒子が負のレベルに落ち込んで安定な自由粒子が存在しえないという困難があった．この困難を避けるためにディラックは，負のエネルギー状態はすべて粒子がすでに占領しているものとした (図 3.1)．

そうすると，パウリの排他原理により，正のエネルギー粒子は，負のエネルギー状態に落ち込むことができず安定となる．この仮定によると，真空状態と

*1)　非相対論では体積 V 中に粒子が 1 個あるように規格化する．すなわち，$\int\psi^\dagger\psi\,\mathrm{d}V=1$ であるが，相対論的にはローレンツ収縮を考慮すると，$\int\psi^\dagger\psi\,\mathrm{d}V\propto\gamma=E/m$ でなければならない．本書では体積 V 中に粒子が $2E$ 個あるように規格化するので (5.3 節参照)，$u(p)^\dagger u(p)=2E$ とする．すなわち $N=\sqrt{E+m}$ となる．

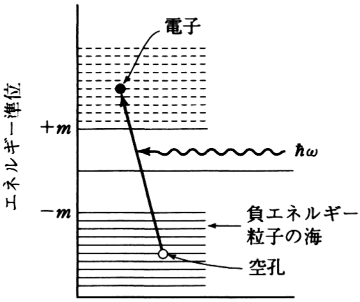


図 3.1 ディラックの空孔理論
負エネルギー状態は詰まっていて，正エネルギー状態へ励起されると，後に空孔が残る．

は何もない“無”の状態ではなく，負のエネルギー状態がぎっしり詰まった電子の海であることとなり，これに伴って新しい事態が生じる．すなわち，真空にエネルギーを与えると，負のエネルギー状態にある電子が正のエネルギー状態に励起されると同時に，後には空き家となった負のエネルギー状態“空孔”が残る．この空孔は外力に対してどのように応じるであろうか？ 電子が電場に引かれて負の方向に動くとすると，電子の移動につれて空孔は逆の方向に動くので，電場に対して正の電荷をもつ粒子のように振る舞うであろう．また，負のエネルギーをもつ電子を詰めれば真空という無の状態が出現するわけであるから，この空孔はエネルギー，運動量，スピン成分，電荷などすべて電子とは逆となる．つまり正のエネルギーと正電荷をもった正常な粒子として観測されることになる．これを**反粒子**という．正エネルギー状態の電子がエネルギーを失い空孔に落ち込めば空孔は消滅して真空状態となる．ディラックの空孔理論は，反粒子の存在を予言し，十分なエネルギー（$E>2m$）があれば，物質化して粒子・反粒子対をつくること，逆に粒子と反粒子が遭遇すれば，対消滅して物質でない純粋なエネルギーに転化することを示したのである．

ディラックは当初，陽子がこの正の反電子ではないかと考えたが，その後，反粒子は，粒子と同じ質量，同じスピン（ただしスピン成分は逆向き），反対の磁気能率をもつことが示され，陽子は反電子ではないことがわかった．ディラックの予言が正しかったことは，その後アンダーソンが，宇宙線現象の中から，霧箱を使って正電荷をもつ電子（陽電子）を発見して示された．

3.3.2　時間を逆行する粒子

こうして反粒子の存在は実験的な裏付けを得たが，デイラックの空孔理論は排他原理の効かないボソンには適用することができないので別の考え方が必要である．このため，負エネルギー粒子が空孔理論ではどのように振る舞うかをみてみよう．いま，p_1, q_1 なるエネルギー運動量をもつ，電子と陽電子が散乱されて，p_2, q_2 をもつ状態になったとしよう（図 3.2 左）．式で書くと

$$p_1+q_1 \longrightarrow p_2+q_2 \tag{3.24 a}$$

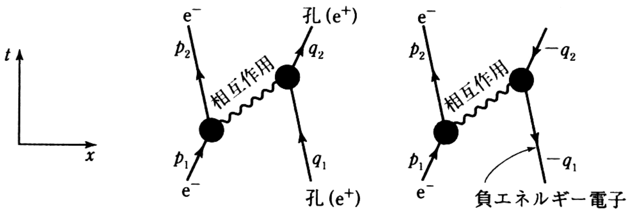


図 3.2　反粒子は，時間を逆行する負エネルギー粒子

空孔理論では q_1 という孔が q_2 という孔になったのであるが，元来は $-q_2$ という負エネルギーの電子が散乱されて，$-q_1$ という状態になったものを解釈し直したものであった．そこで，元の電子の状態で式を書くと

$$p_1+(-q_2) \longrightarrow p_2+(-q_1) \tag{3.24 b}$$

この場合 $(-q_2)$ の電子が散乱されることは，$(-q_1)$ の孔を埋めることに先行する．観測される現象の順序に従って，初期状態の p_1, q_1 を（3.24 b）の左辺に，終状態の p_2, q_2 を右辺に書くことにした上で，元の電子で時間順序を考え直すと，図 3.2 右図のように表されるであろう．矢印は時間の進む方向を示す．すなわち，負のエネルギー（と同時に運動量も負）の粒子が時間を逆行すると正のエネルギー，正の運動量をもつ反粒子にみえるという解釈が成立する．この考え方はボソンにも適用できる概念である．もちろん実在の陽電子は時間を順行するのであり，“時間を逆行する粒子”なるものは実際には存在しない．あくまでも負エネルギーをもつ解を，実際の物理現象に矛盾なく適用させるための便宜的な解釈である．ファインマン（R. Feynman）やシュトゥッケルベルグ（Stuckelberg）は，負エネルギー粒子の海という考えは捨てて，

時間を逆行する粒子という概念だけを負エネルギー粒子に適用したのである．平面波でみてみよう．$E<0$ の平面波は，

$$e^{ip\cdot x-iEt}\big|_{E<0}=e^{i(-p)\cdot(-x)-i(-E)(-t)} \tag{3.25}$$

と書けるから，$p^\mu=(-E>0;-\boldsymbol{p})$ をもつ粒子が，$(-t;-\boldsymbol{x})$ 方向につまり時間を逆行すると，正のエネルギー（振動数）をもつ粒子と同じ位相を与える．平面波解 $\phi=Ne^{-ipx}$ でカレント j^μ をつくると，

$$j^\mu=ie(\phi^*\partial^\mu\phi-\partial^\mu\phi^*\phi)\sim ep^\mu=e(E;\boldsymbol{p}) \tag{3.26}$$

のとき，$(-\boldsymbol{p})$ の運動量をもつ負エネルギー解に対しては，$E\to-|E|$, $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ とすれば，

$$j^\mu=e(-|E|;-\boldsymbol{p})=-e(|E|;\boldsymbol{p}) \tag{3.27}$$

となって，$\boldsymbol{p}$ の運動量をもつ正のエネルギー解と同じエネルギー運動量をもつが，電荷は逆の粒子を与えることがわかる．

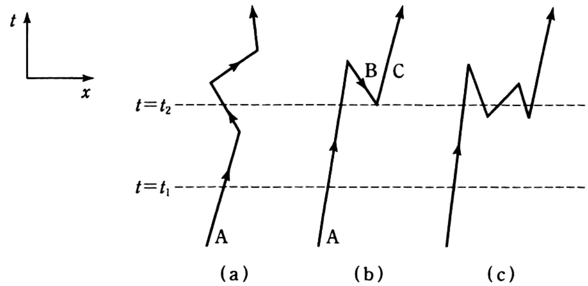


図 3.3 時間の逆行を許すと真空中に粒子・反粒子対が現れる
(a) 通常の散乱，(b) 時間逆行を許す場合，(c) $t=t_2$ で 5 個の粒子が存在する．

こうした時間を逆行する粒子の概念は，粒子の散乱に対し新しい考え方を導入する．いま粒子 A が相互作用をしながら，時空で軌跡を描く有り様を図に表してみると図 3.3 のようになる．従来の考え方では，軌跡は図 3.3 a のようにしかならない．常に時間に順行して逆行することはない．負エネルギー状態を取り入れた新しい考え方では図 3.3 b のように過去に向かって散乱することが可能となる．実際に観測される現象としては，時間的に常に順方向に進むように再解釈しなければならない．図 3.3 b において何もない真空から突如として，反粒子 B と粒子 C が創生され，反粒子はやがて元々存在した粒子 A と遭遇して真空に戻り，粒子 C のみが進行すると解釈できる．真空から突如とし

て粒子対が出現することはハイゼンベルグの不確定性原理の範囲ならば許される．さらに図 3.3 c のように同時に多数個の粒子反粒子が存在する状態も考えうる．電荷の保存は満たしていなければならないから，時間に逆行する電子は反対電荷をもつのである．ディラックの負エネルギーの海であれ，時間に逆行する粒子であれ，負エネルギー状態を認めると必然的に 1 体問題から多体問題に移行せざるをえないことがわかる．真空も安定ではなく常に粒子反粒子の生成消滅を繰り返して煮えたぎっている温泉地獄のようなものといえる．

以上の議論をふまえて，反粒子の平面波波動関数を次式で定義する．

$$v_1(\boldsymbol{p})=u_4(-\boldsymbol{p}),\qquad v_2(\boldsymbol{p})=u_3(-\boldsymbol{p}) \tag{3.28}$$

ただし u_3, u_4 は (3.23 b) で与えられる $E<0$ の平面波解である．

演習 3.8　$v_1(p)=u_4(-p),\qquad v_2(p)=-u_3(-p)$

を定義し，$N=\sqrt{|E|+m}$ とすると

$$\begin{aligned}
&u^{\dagger}{}_r(p)u_s(p)=2E\delta_{rs}\\
&v^{\dagger}{}_r(p)v_s(p)=2E\delta_{rs}\\
&\bar{u}_r(p)u_s(p)=-\bar{v}_r(p)v_s(p)=2m\delta_{rs}\\
&\bar{u}_r(p)v_s(p)=\bar{v}_r(p)u_s(p)=0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

を示せ．

3.4　ディラック粒子の磁気能率

ディラック方程式に従う粒子（以下ディラック粒子という）がどのような性質を示すかを調べるために，電磁場との相互作用を考える．シュレーディンガー方程式における電磁場との相互作用と同じく，最小作用の原理（またはゲージ原理）によって

$$E\to E-q\phi,\quad \boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A}\quad（まとめて\ p^{\mu}\to p^{\mu}-qA^{\mu}） \tag{3.30}$$

で与えられるとすると，電子の場合 $q=-e$ であるから，(3.20) に，この置き換えを施すと

$$(E+e\phi-m)u_{\mathrm{A}}=\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})u_{\mathrm{B}} \tag{3.31 a}$$

$$(E+e\phi+m)u_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})u_{\mathrm{A}} \tag{3.31 b}$$

$E>0$ の解で，非相対論近似（$E=m+T$ のとき，$T\ll m,\quad e\phi\ll m$）を行うと

$$E+e\phi-m=T+e\phi$$
$$E+e\phi+m\approx 2m \qquad (3.32)$$

であるので

$$\therefore \quad u_{\rm B}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})}{2m}u_{\rm A} \qquad (3.33)$$

となり，これを (3.31 a) に代入すると

$$(T+e\phi)u_{\rm A}=\frac{[\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\nabla+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\nabla+e\boldsymbol{A})]}{2m}u_{\rm A} \qquad (3.34)$$

ここで，スピン演算子の性質を使うと

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$$
$$(-i\nabla+e\boldsymbol{A})\times(-i\nabla+e\boldsymbol{A})u=-ie(\nabla\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\nabla)u$$
$$=-ie(《\nabla\times\boldsymbol{A}》u+《\nabla u》\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times《\nabla u》)=-ie\boldsymbol{B}u \qquad (3.35)$$

ただし《　》は，∇演算子の作用が《　》の中だけで閉じていることを示す．$\boldsymbol{B}$ は磁場である．(3.35) を (3.34) に入れて整理すると

$$Tu_{\rm A}=\left[-\frac{1}{2m}(\nabla+ie\boldsymbol{A})^2-e\phi+\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right]u_{\rm A} \qquad (3.36)$$

となり，これは通常の電磁相互作用を取り入れたシュレーディンガー方程式に，磁気能率 μ と磁場 B の相互作用 $(-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B})$ が入った式である．これはディラック粒子は，$\boldsymbol{\mu}=-\dfrac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}$ をもつことを示す．通常 $\boldsymbol{\mu}=g\dfrac{q}{2m}\boldsymbol{s}$ と書くのでディラック粒子は，g 因子（g factor）2 をもつことになる．電荷 q 質量 m をもつ粒子が円運動すると磁気能率は $\boldsymbol{\mu}=\dfrac{q}{2m}\boldsymbol{L}$（$\boldsymbol{L}$ は軌道角運動量）となるから，古典的概念からは g 因子は常に 1 でなければならない．この事実もまたスピンという物理量が，質量分布をした物体の自転角運動量という古典的解釈とは相入れない量であることを示す．

回転運動から生じる磁気能率は次のように計算できる．電荷 q をもった粒子が円運動をするとき生じる電流を I とし，円の面積を A とすると磁気能率は IA で与えられる．半径を r，粒子の速度を v，周期を T とし，振動数を $\nu=1/T=v/(2\pi r)$ とすると，$\mu=IA=q\nu\pi r^2=q(v/(2\pi r))(\pi r^2)=(q/2m)rmv=(q/2m)L$

$g-2$ を異常磁気能率という．例えば陽子や中性子はそれぞれ磁気能率 2.79 または −1.91（$e/2m_{\rm p}$(=nuclear magneton) を単位）をもち，異常磁気能率

が大きいので，ディラック粒子つまり基本粒子ではないことがわかる．ただし，ディラック粒子でも相互作用の高次効果（放射補正）の影響で $g=2$ からずれることはある．

3.5　ディラック方程式の共変性

ディラック方程式を，相対論的議論をするのに便利なように扱うため (3.3) 式の右辺を左辺に移行し，左から β を掛けると

$$\left(\beta i\frac{\partial}{\partial t}-\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\nabla}{i}-m\right)\psi(x)=0 \tag{3.37}$$

ここで，$\gamma^\mu\equiv(\gamma^0=\beta\,;\gamma^i=\beta\alpha_i)$ を導入し，$p_\mu=i\partial_\mu$ を使うと上式は，

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu-m)\psi(x)=(\gamma^\mu p_\mu-m)\psi\equiv(\not p-m)\psi=0 \tag{3.38}$$

となる．ここで，γ は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu} \tag{3.39}$$

を満たす 4×4 の行列である．また後に使うので

$$\gamma^5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{3.40}$$

をも定義しておく．パウリ-ディラック行列表示であらわに書くと

$$\gamma^0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix},\quad \gamma^5=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{3.41}$$

これらの γ は次のような性質をもつ．

$$\begin{aligned}&\gamma^5\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^5=0\\ &\gamma^{0\dagger}=\gamma^0,\quad \gamma^{i\dagger}=-\gamma^i\ (i=1,2,3),\quad \gamma^{5\dagger}=\gamma^5\end{aligned} \tag{3.42}$$

また，(3.38) に共役なディラック方程式を求めるには，(3.38) のエルミート共役をとり，

$$\psi^\dagger(-i\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma^{\mu\dagger}-m)=0 \tag{3.43}$$

ただし，微分演算子 $\overleftarrow{\partial}$ は左に掛かるものとする．$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$, $\gamma^{k\dagger}=\gamma^0\gamma^k\gamma^0$ を使い右から γ^0 を掛けると

$$i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu+m\overline{\psi}\equiv\overline{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu+m)=\overline{\psi}(\not p+m)=0 \tag{3.44}$$

$\overline{\psi}\equiv\psi^\dagger\gamma^0$ は，ψ の共役 (adjoint) と呼ばれる．

演習 3.9 p_μ を c 数として

$$(\not{p}-m)u(p)=0, \qquad (\not{p}+m)v(p)=0$$
$$\bar{u}(p)(\not{p}-m)=0, \qquad \bar{v}(p)(\not{p}+m)=0 \tag{3.45}$$

を証明せよ.

演習 3.10 (3.45) を参照して

$$\Lambda_+\equiv\frac{1}{2m}(m+\not{p}), \qquad \Lambda_-\equiv\frac{1}{2m}(m-\not{p}) \tag{3.46}$$

は，それぞれ正負のエネルギー解に対する射影演算子であることを証明せよ（射影演算子であることの性質は，$\Lambda^2{}_\pm=\Lambda_\pm$, $\Lambda_++\Lambda_-=1$).

演習 3.11 スピンの状態和（偏極方向についての和）は，

$$\sum_{r=1,2}u_r(p)\,\bar{u}_r(p)=\not{p}+m, \qquad \sum_{r=1,2}v_r(p)\,\bar{v}_r(p)=\not{p}-m \tag{3.47}$$

と書けることを示せ.

いま，ローレンツ変換を施し，L 系から L' 系に移り，$x^\mu \longrightarrow x'^\mu=L^\mu{}_\nu x^\nu$, $\psi(x)\longrightarrow\psi'(x')$ になったとする．そのとき線形変換

$$\psi'(x')=S\psi(x) \tag{3.48}$$

が存在し，同じ形の方程式

$$(\gamma^\mu i\partial'_\mu-m)\psi'(x')=0 \tag{3.49}$$

を満たすならば，ディラック方程式はローレンツ共変といえる．(3.48) を (3.49) に代入し左から S^{-1} を掛けた式

$$(S^{-1}\gamma^\mu S i\partial'_\mu-m)\psi(x)=0 \tag{3.50}$$

が，(3.38) と等しいことを要求すると

$$\gamma^\mu\partial_\mu=S^{-1}\gamma^\mu S\partial'_\mu \tag{3.51}$$

すなわち，γ^μ が，反変ベクトルと同じ変換性

$$S^{-1}\gamma^\mu S=L^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{3.52}$$

をもてばよい．そのためには，連続有限変換は微小変換の繰り返しで得られるから，微小変換に対し (3.52) を満たす S が存在することをいえば十分である．(2.67) を参照して，微小ローレンツ変換 $L^\mu{}_\nu$ を，

$$L^\mu{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu+\varepsilon^\mu{}_\nu \tag{3.53 a}$$

と書くと，

$$\varepsilon_{\mu\nu}=g_{\mu\rho}\varepsilon^\rho{}_\nu=-\varepsilon_{\nu\mu} \tag{3.53 b}$$

を満たす．S を $\varepsilon_{\mu\nu}$ で展開してその係数を $(i/4)\sigma^{\mu\nu}$ (4×4 行列) とおき，$\varepsilon_{\mu\nu}$

の高次の項は無視すると

$$S=1-(i/4)\sigma^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu},\qquad S^{-1}=1+(i/4)\sigma^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \tag{3.54}$$

$$\sigma^{\mu\nu}=-\sigma^{\nu\mu}$$

(3.53), (3.54) を (3.52) に代入すると,

$$g^{\mu\rho}\gamma^{\sigma}-g^{\mu\sigma}\gamma^{\rho}=(1/2i)[\gamma^{\mu},\sigma^{\rho\sigma}] \tag{3.55}$$

が得られる.

$$\sigma^{\mu\nu}=(i/2)[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \tag{3.56}$$

はこれを満たす.

演習 3.12　ここで得られた $\sigma^{\mu\nu}/2$ は，ローレンツ演算子 $M^{\mu\nu}$ ((2.64)) としての資格つまり正しい交換関係 (2.63) をもっていることを示せ.

演習 3.13　(3.55) を導き，また (3.56) が実際に (3.55) を満たすことを示せ.

演習 3.14　$S^{-1}=\gamma^0S^{\dagger}\gamma^0$, $\gamma^5S=S\gamma^5$ を示せ.　(3.57)

(3.57) より S は，ユニタリー演算子ではないことがわかる.

演習 3.15　x 方向のローレンツ演算子を実際に計算し,

$$\begin{aligned}S&=\exp(-iN_1\eta)=\cosh(\eta/2)+\sinh(\eta/2)\alpha_1\\&=\begin{bmatrix}\cosh(\eta/2), & \sinh(\eta/2)\sigma_1\\ \sinh(\eta/2)\sigma_1, & \cosh(\eta/2)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.58}$$

を示せ．ただし，$\eta=(1/2)\ln[(1+\beta)/(1-\beta)]$ は，(2.54) で定義したラピディティである．ヒント；$N_1=M_{01}=\sigma_{01}/2=i\alpha_1/2$ を使え.

演習 3.16　$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, $S=\exp(\eta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}/2)$ のとき，S を (3.13) の w_s に演算すると，ディラック方程式の平面波解 u_1, u_2 (8.23 a) と v_2, v_1 (3.28) が得られることを示せ.

(3.48) と (3.57) より $\bar{\psi}$ はローレンツ変換で

$$\bar{\psi}(x)\longrightarrow\bar{\psi}'(x')=\bar{\psi}(x)S^{-1} \tag{3.59}$$

のように変換するので,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{3.60}$$

が，ローレンツスカラーであること，また

$$j^{\mu}\equiv\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{3.61}$$

はローレンツベクトルであることがいえる．しばしば γ^{μ} がベクトルであるという言い方をするが，それは正確には $\psi(x)$ にはさまれてはじめて意味をもつものである．$\psi(x)$ の変換はローレンツベクトル等とは異なり，双1次形式

(O を任意の 4×4 の行列として，$\bar{\psi}O\psi$ の形のこと）がベクトルやテンソルの変換をする．このような形のローレンツ変換をする量を一般にスピノールと呼ぶ．やや不正確な表現ではあるが，比喩的にスピノールはベクトルの平方根であり，ディラック方程式はクライン-ゴルドン方程式を因数分解したものという言い方ができる．ここで注意すべきことは，ローレンツスカラーは，$\bar{\psi}\psi$ であって，$\psi^\dagger\psi$ ではないということである．$\psi^\dagger\psi=\bar{\psi}\gamma^0\psi=j^0$ であって，カレントの第 0 成分つまり密度のように振る舞う．

演習 3.17 ディラック方程式 (3.38) と (3.44) を使うと $\partial_\mu j^\mu=0$ であることがいえることを示せ．

3.6 パリティ変換

ディラック方程式

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi(x)=0 \tag{3.37}$$

でパリティ変換 $x^\mu=(x^0;\boldsymbol{x})\longrightarrow x'^\mu=(x^0;-\boldsymbol{x})=x_\mu$ を行うと，(3.50), (3.51) から

$$S^{-1}\gamma^0 S=\gamma^0, \qquad S^{-1}\gamma^k S=-\gamma^k \tag{3.62}$$

なる S があれば，ディラック方程式は，パリティ変換に対して不変といえる．

$$S=\eta_P\gamma^0 \tag{3.63}$$

はこれを満たす．ただし η_P は絶対値が 1 の位相因子である．パリティ変換を $\boldsymbol{p}=0$ とおいた平面波解に適用すると

$$Su_r=\eta_P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}u_r=\eta_P u_r, \qquad Sv_r=-\eta_P v_r \tag{3.64}$$

であるので，ディラック粒子とその反粒子は，相対的に負のパリティをもつ．通常は，$\eta_P=1$ として粒子のパリティを正と定義するので，反粒子は負のパリティをもつ．

双 1 次共変系　4×4 行列でつくられる双 1 次形式には独立な量が 16 個あり，すべてローレンツ変換に対して定まった変換の性質をもっている．$V^\mu\equiv\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は，(3.61) でみたように固有ローレンツ変換変換に対しては，反変ベクトルのように振る舞い，空間反転（パリティ変換）に対しては，

$$V'^0 = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^0\gamma^0\psi = V^0, \qquad V'^k = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^k\gamma^0\psi = -V^k \tag{3.65}$$

したがって，V^μ は，極性 (polar) ベクトルである．

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \qquad \sigma_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\sigma^{\rho\sigma} \tag{3.66}$$

を導入すれば，

$$V^\mu \xrightarrow{P} V'^\mu = V_\mu \tag{3.67}$$

のように書ける．以下同様に，16 個の独立な量を変換の性質で分けてまとめると表 3.1 のようになる．

表 3.1　ディラック双 1 次形式のローレンツ変換性

名称	記号	双 1 次形式	成分の数	パリティ変換後	パリティ
スカラー	S	$\bar{\psi}\psi$	1	$\bar{\psi}\psi$	$+$
擬スカラー	P	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ *	1	$-i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$-$
ベクトル	V	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	$-$
軸性ベクトル	A	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	$-\bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu\psi$	$+$
テンソル	T	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$	$+$

*　i をつけるのはエルミート量とするためである．

演習 3.18　表 3.1 の変換性を確かめよ．

演習 3.19*　(3.23) を使うと，Γ の行列要素 $\langle p'|\Gamma|p\rangle = \bar{u}(p')\Gamma u(p)$ は，非相対論近似で $O(p/m)$ までとると，表 3.2 で与えられることを示せ．

表 3.2　γ 行列の非相対論近似

Γ	$\langle p'\|\Gamma\|p\rangle/2m$
1	1
γ^0	1
$\boldsymbol{\gamma}$	$\left[\dfrac{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')}{2m}+\dfrac{i\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})}{2m}\right]$
$\gamma^0\gamma^5$	$\left[\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')}{2m}\right]$
$\boldsymbol{\gamma}\gamma^5$	$\boldsymbol{\sigma}$
$\sigma_{ij}=(i/2)[\gamma_i, \gamma_j]$	$\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ (ijk は 123 の巡回置換)
$\sigma^{k0}=(i/2)[\gamma^k, \gamma^0]$	$(-i)\left[\dfrac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')}{2m}-\dfrac{i\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')}{2m}\right]$
γ^5	$\left[\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')}{2m}\right]$

非相対論の場合 $\boldsymbol{p}\approx m\boldsymbol{v}$ であることを使い，上の量を速度で書き直すと

$$\langle 1\rangle,\quad \langle\gamma^0\rangle\sim 1,\quad \langle\gamma^\mu\rangle\sim(1;\boldsymbol{v}),\quad \langle\gamma^\mu\gamma^5\rangle\sim(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v};\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.68}$$

となる．この表式は，$\langle\Gamma\rangle$ の物理的解釈や運動学的にどの項が効くかの判定に役立つ．

3.7 荷電共役変換

荷電共役変換 (charge conjugation) とは，粒子と反粒子とを入れ換える演算のことである．エネルギー運動量 $(-p^\mu)$ の反粒子は p^μ をもつ粒子と同じように振る舞うということ，クライン-ゴルドン方程式の平面波解では，その差は複素共役の差にすぎないことを考えると，荷電共役と複素共役 (演算子ではエルミート共役) 演算は密接に結びついていることが推察される．粒子と反粒子の違いは電荷にある．電荷との相互作用は

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - qA^\mu \tag{3.69}$$

で得られるが，反粒子の場合は，$q\to -q$ となるので，$p^\mu - qA^\mu$ を含む方程式が，$p^\mu + qA^\mu$ に変わるように書き換えれば，それが荷電共役演算となる．手始めにクライン-ゴルドン方程式から始めてみよう．クライン-ゴルドン方程式に，(3.69) の置き換えを行うと，

$$[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu) + m^2]\phi = 0 \tag{3.70}$$

となるから，ここでエルミート共役をとると，

$$[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial^\mu - iqA^\mu) + m^2]\phi^\dagger = 0 \tag{3.71}$$

(3.70) と (3.71) を比較して，ϕ が粒子を記述するならば $\phi^\dagger$ が反粒子を記述するから，最初の推論が証明されたことになる．このことからいえることは，ϕ が実場であるときは中性粒子を記述するということである．フォトンつまり電磁場は実場の例である．もっとも電気的に中性であることは実場であることを意味しない．K^0 中間子のように，電気的に中性であっても，ストレンジネスのような量子数をもてば，逆のストレンジネスをもつ反粒子が定義できやはり複素場で記述される．

ディラック粒子の場合は，ψ が多成分であるので，成分間の混合も考慮しなければならず演算は多少複雑となる．電磁場を入れたディラック方程式は，

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\psi = 0 \tag{3.72}$$

で与えられるから，上の ψ に対応して ψ^{C} が存在し，

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]\psi^{\mathrm{C}} = 0 \tag{3.73}$$

を満たすならば ψ^{C} は，ψ の荷電共役であり粒子に対し反粒子を表す．(3.72) のエルミート共役をとると

$$\psi^\dagger[\gamma^{\mu\dagger}(-i\overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m] = 0$$

$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{k\dagger} = \gamma^0\gamma^k\gamma^0$ を使い，右から γ^0 を掛けると

$$\overline{\psi}[-\gamma^\mu(i\overleftarrow{\partial}_\mu + qA_\mu) - m] = 0 \tag{3.74}$$

ここで転置をとると

$$[-\gamma^{\mu\mathrm{T}}(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]\overline{\psi}^{\mathrm{T}} = 0$$

左から行列 C を掛けると，

$$[-C\gamma^{\mu\mathrm{T}}C^{-1}(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]C\overline{\psi}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{3.75}$$

であるから

$$C\gamma^{\mu\mathrm{T}}C^{-1} = -\gamma^\mu \tag{3.76}$$

を満たす C が存在するならば，荷電共役変換が定義できて，

$$\psi^C = C\overline{\psi}^T \tag{3.77}$$

は，(3.73) と同じ方程式を満たす．

$$\gamma^{\mu\mathrm{T}} = \gamma^\mu \ (\mu = 0, 2), \quad \gamma^{\mu\mathrm{T}} = -\gamma^\mu \ (\mu = 1, 3)$$

を使えば，

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

は，(3.76) を満たす．この C は

$$C = C^* = -C^{-1} = -C^{\mathrm{T}} = -C^\dagger \tag{3.79}$$

を満たすという性質をもっている．したがって，ディラック波動関数の荷電共役変換は，

$$\begin{aligned} \psi^C &= C\overline{\psi}^{\mathrm{T}} = i\gamma^2\gamma^0\gamma^{0\mathrm{T}}\psi^* = i\gamma^2\psi^* \\ \overline{\psi}^C &= \psi^{c\dagger}\gamma^0 = (C\overline{\psi}^{\mathrm{T}})^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}^* C^\dagger\gamma^0 = \psi^{\mathrm{T}}\gamma^{0*}C^\dagger\gamma^0 = -\psi^{\mathrm{T}}C^{-1} \end{aligned} \tag{3.80}$$

で与えられる．電流は荷電共役により符号を変える．量子力学の範囲ではこれは荷電共役の定義みたいなもので手で入れるしか方法がないが，場の量子論では自動的に導けることを示そう．

証明

$$j^{C\mu}=\bar{\psi}^C\gamma^\mu\psi^C=-\psi^T C^{-1}\gamma^\mu C\bar{\psi}^T=\psi^T\gamma^{\mu T}\bar{\psi}^T=-(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^T$$
$$=-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=-j^\mu \tag{3.81}$$

最後から3番目の負号はフェルミオン場の反可換性（§4.5参照）からでるもので，最後から2番目で転置がはずせるのは，括弧の中が1×1の行列であるからである．

演習 3.20
$$C\bar{u}_1{}^T=v_1,\quad C\bar{u}_2{}^T=-v_2,\quad C\bar{v}_1{}^T=u_1,\quad C\bar{v}_2{}^T=-u_2 \tag{3.82}$$
であることを示せ．

3.8 カイラル表示とワイル粒子

これまで使用してきたディラック表示は，非相対論的（$m\gg p, E$）議論をするとき便利である．スピンパリティや磁気能率などの静的性質はこの表示を使うと理解しやすい．しかし，超相対論的（$E, p\gg m$）現象を議論するときは，$m=0$ の状態を出発点とするカイラル（ワイル）表示が便利である．ワイル表示では，ディラック行列は次のように表される．

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{bmatrix},\quad \beta=\gamma^0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix} \tag{3.83 a}$$

$$\gamma^5=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad C=i\gamma^2\gamma^0=\begin{bmatrix}i\sigma_2 & 0\\ 0 & -i\sigma_2\end{bmatrix} \tag{3.83 b}$$

この表示でのディラック場を ψ_W，ディラック表示での場を ψ_D と書くと，ψ_D と ψ_W は

$$\psi_D=T\psi_W \tag{3.84 a}$$

$$\gamma_D=T\gamma_W T^{-1},\qquad T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{3.84 b}$$

で結ばれている．この節では以下 ψ_W を ψ と書く．次に

$$\psi_L=\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi,\qquad \psi_R=\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi \tag{3.85}$$

を定義すると

$$\gamma^5\psi_L=-\psi_L, \qquad \gamma^5\psi_R=\psi_R \tag{3.86}$$

は γ^5 の固有状態となる．γ^5 のことをカイラリティ (chirality) 演算子という．

$\psi_{R,L}$ はカイラリティが ±1 の固有状態である．ディラック方程式

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu-m)\psi(x)=0 \tag{3.87 a}$$

に左から γ^5 を掛けて，γ の交換関係を使うと

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu+m)\gamma^5\psi(x)=0 \tag{3.87 b}$$

(3.87 a) と (3.87 b) の差と和をつくると

$$\gamma^\mu i\partial_\mu\psi_R=m\psi_L \tag{3.88 a}$$

$$\gamma^\mu i\partial_\mu\psi_L=m\psi_R \tag{3.88 b}$$

この 2 式は $m=0$ であれば独立であるが，$m\neq0$ のとき運動によって ψ_L と ψ_R が混じることを意味している．また質量項がカイラリティ ＋ と － の状態を繋げる演算子となっているといってもよい．

$m\neq0$ のとき γ^5 とハミルトニアンは交換しないのでカイラリティ固有状態は運動によって変化する．が，γ^5 はローレンツ演算子とは交換する ((3.57) 参照)．すなわちカイラリティは固有ローレンツ変換では不変な量であるので，状態を指示する量としてよく使われる重要な概念である．特に弱い相互作用は，カイラリティが負の状態つまり ψ_L と，正の状態つまり ψ_R に対する相互作用の仕方が異なるので，この区別は重要な意味をもつ．

γ^5 の物理的性質をみるために次のように分解してみる．

$$\gamma^5=\frac{-\gamma^0\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}}{E}-\frac{\gamma^0\gamma^5E\gamma^0}{E}+\frac{\gamma^0\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}}{E} \tag{3.89 a}$$

$$-\gamma^0\gamma^5\boldsymbol{\gamma}=-\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\-\boldsymbol{\sigma}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Sigma}$$

であるので

$$\gamma^5=\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E}-\frac{\gamma^0\gamma^5}{E}\{p^0\gamma^0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}\}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E}-\frac{\gamma^0\gamma^5}{E}\not{p}$$

自由粒子に対しては $\not{p}=\pm m$ であるので，

$$\gamma^5=\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E}\mp\frac{m}{E}\gamma^0\gamma^5=\pm\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|}+O\left(\frac{m}{E}\right) \tag{3.89 b}$$

すなわち γ^5 は，粒子と反粒子の違いをも考慮したヘリシティ演算子の相対論

的拡張と見なせる．そこでヘリシティに対して使われた右巻き左巻きという言葉をそのままカイラリティに対しても使うことがある．

$$\psi=\begin{bmatrix}\chi\\\phi\end{bmatrix} \tag{3.90}$$

と書くと，ワイル表示では

$$\psi_{\mathrm{L}}=\begin{bmatrix}\chi\\0\end{bmatrix},\qquad \psi_{\mathrm{R}}=\begin{bmatrix}0\\\phi\end{bmatrix} \tag{3.91}$$

であるので，(3.88) を書き直すと

$$i(\partial_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\phi=m\chi \tag{3.92 a}$$

$$i(\partial_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\chi=m\phi \tag{3.92 b}$$

となるが，平面波解に対しては次式のように書き換えられる．

$$(E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\phi=m\chi \tag{3.93 a}$$

$$(E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\chi=m\phi \tag{3.93 b}$$

$m=0$ であれば，χ と ϕ は分離する．このとき，

$$E\chi=-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi \quad \text{または} \quad \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E}\chi=-\chi \tag{3.94 a}$$

$$E\phi=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi \quad \text{または} \quad \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E}\phi=\phi \tag{3.94 b}$$

$m=0$ のときは，$|E|=|\boldsymbol{p}|$ であるから，上記の解はヘリシティの固有状態であることがわかる．

χ は $E>0$ のときはヘリシティ $h=-$，$E<0$ のときは $h=+$，逆に
ϕ は $E>0$ のときはヘリシティ $h=+$，$E<0$ のときは $h=-$ をもつ．

この二つの解をワイル (Weyl) 解といい，それぞれ独立な解である．パリティ変換で $\chi\to\chi_{\mathrm{P}}$, $\phi\to\phi_{\mathrm{P}}$ となるものとすると，このとき $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ であるので，$(\chi_{\mathrm{P}}, \phi_{\mathrm{P}})$ は，(ϕ, χ) と同じ方程式を満たす．つまり χ と ϕ が入れ替わるので，パリティが保存している世界ではワイル解は成立しない．歴史的にはワイル解は早くから知られていたが，パリティ変換で不変でないため物理的に意味のある解とは見なされていなかった．しかし 1957 年に弱い相互作用でのパリティの破れが明らかになると同時に復活し，ニュートリノがワイル解である可能性が試された．ワイル解には，上記のよう

に 2 成分の独立な解が 2 組存在し，どちらがこの世の中で実現しているかの判定は，実験に頼らねばならない．β 崩壊の研究などからは，ニュートリノにはヘリシティ負の成分のみが，そして，反ニュートリノには，ヘリシティ正の成分のみが存在することが実証された（第 10 章弱い相互作用で議論する）．すなわち，ニュートリノは 2 成分しかもたない（2 成分ニュートリノという）．また今までのところ非常な努力にもかかわらず，ニュートリノの質量は未だに有限な値が得られず，実験事実に関する限りニュートリノがワイル解である確率はかなり高い*2)．しかし，現代の統一ゲージ理論の考え方によると質量が 0 というのは非常に特殊な状況であり，そのための正当な理由がなければならない．例えばフォトンの質量がゼロであると信じるのはそれが電磁相互作用のゲージ場の量子だからである．今のところニュートリノにはそうした理由が見つからず，したがって質量はゼロでないと考える方が自然である．そのため，質量が有限でかつ 2 成分のマヨラナ解が有力視されている．しかし，ワイル解である可能性も十分あることには留意しておいた方がよいであろう．

さて，χ と ϕ をヘリシティ固有状態 χ_+, χ_-（式 (3.17)）で展開してみよう．

$$\phi = a\chi_+ + b\chi_-, \qquad \chi = c\chi_+ + d\chi_- \tag{3.95}$$

と書き，(3.93) に入れ，$\chi_\pm$ は互いに直交することを使うと，

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{d} = \frac{E-p}{m} = \frac{m}{E+p} \tag{3.96}$$

ただし，$p = |\boldsymbol{p}|$ である．これより，χ と ϕ が解けて

$$\chi = \pm N\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\left[\chi_- \pm \frac{m}{E+p}\chi_+\right] \tag{3.97 a}$$

$$\phi = N\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\left[\chi_+ \pm \frac{m}{E+p}\chi_-\right] \tag{3.97 b}$$

となる．N は規格化因子である．上式は E が負でも成立する．これを眺めると，$\phi_L \sim \chi$ は，粒子はほぼヘリシティ負の状態で，正のヘリシティ成分は～$O(m/E)$ 程度しかないことがわかる．$E<0$ のとき χ は

$$\chi(E<0) = -N\sqrt{\frac{|E|+p}{2|E|}}\left[\chi_+ \mp \frac{m}{|E|+p}\chi_-\right] \tag{3.97 c}$$

---

*2)　最近，スーパーカミオカンデグループが大気ニュートリノの天頂角分布から，ν_μ が他種のニュートリノ（たぶん ν_τ）に変わるニュートリノ振動現象（演習 2.13 参照）の存在を確認して，$\Delta m^2 \simeq 2\times10^{-3}\mathrm{eV}^2$ と決めた[2]．3 種のニュートリノのうち少なくも 1 個は質量の存在が確認されたのでこれに関してはワイル解ではありえない．

と書き直せるので，ヘリシティの優勢な成分が逆転することがわかる．$\phi_L \sim \chi$, $\phi_R \sim \phi$ は，$m=0$ の極限としてワイル粒子状態を含む．

$m \neq 0$ のときに，逆ヘリシティ成分が $O(m/E)$ 生じることは，物理的には次のように理解される．$m \neq 0$ であれば，粒子はもはや光速では飛べないので，粒子速度より速く動く系でみれば運動方向が逆転する．スピン方向は変わらないのでヘリシティが変わる．すなわち，$m \neq 0$ の粒子はあらゆるローレンツ系でヘリシティが同じというわけにはいかない．ローレンツ変換で不変な演算子カイラリティの固有状態は，ヘリシティの異なる状態の混合であるということである．場の理論の言葉では，ϕ_L と ϕ_R が質量により結合するという．

3.9 マヨラナ粒子

粒子と反粒子を区別する指標としては，電荷，アイソスピン，ストレンジネスなどがあり，これらの標識をもつもののみが実験上区別できる．

例：　$e^+ \neq e^-$ （電荷，レプトン数）

　　　$n \neq \bar{n}$ （磁気能率，バリオン数）

　　　$K^0 \neq \bar{K}^0$ （ストレンジネス）

π^0 やフォトン γ にはこうした標識がなく，粒子と反粒子の区別がない．そこでニュートリノに粒子と反粒子を区別する標識があるかと考えるに，ニュートリノは電子やミューオンと同じ仲間ということで，レプトン数を保存すると考えられ，粒子と反粒子にはそれぞれレプトン数 1, -1 が割り振られている．実験で試されたときは，ニュートリノは常にレプトン数保存を満たすように振る舞ってきた．例えば ν_μ と $\bar{\nu}_\mu$ とは，それぞれ

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \qquad \pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{3.98}$$

から生成されるが，2 種類のニュートリノは，核子に衝突させると，それぞれ

$$\nu_\mu + n \longrightarrow \mu^- + p, \qquad \bar{\nu}_\mu + p \longrightarrow \mu^+ + n \tag{3.99}$$

のように，μ^- （レプトン数=1）と，μ^+ （レプトン数−1）と，レプトン数を正しく保存するように反応し，ν_μ を p に当てても μ^+ は生成されない．しかし，弱い相互作用がカイラリティ −1 の ϕ_L のみに働くことを考えると*3)，上記の

*3) 正確には荷電カレント反応のみ．中性カレントは ϕ_R にも働く．

反応に関与するのは，ψ_L のみであり，もし ν の質量がゼロであればワイル粒子であって，粒子は左巻きに反粒子は右巻きにとヘリシティ状態と1対1の対応がある．つまりこれまでレプトン数保存の証拠と見なされた実験は単にヘリシティ保存をテストしていただけという可能性がある．レプトン数を忘れればニュートリノは中性であるから実験的に粒子と反粒子の区別のしようがない．そこで理論的にもニュートリノは粒子と反粒子の区別のつかないフェルミオン(マヨラナ粒子) であるとしてみよう．

マヨラナ粒子の条件は

1：ディラック方程式を満たす．　$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)N(x)=0$　　(3.100 a)

2：粒子と反粒子は同一である．　$N^C=N$　　(3.100 b)

この二つの条件は，ψ がディラック方程式を満たすとして

$$N=\psi+\psi^C$$

とおくことによって満たされる．ψ^C の表現 $\psi^C=C\overline{\psi}^T$ を考慮すると，ξ, η を2成分のスピノールとして，

$$N_1(x)=D\begin{bmatrix}\eta(x)\\ -i\sigma_2\eta(x)^*\end{bmatrix},\qquad N_2(x)=D\begin{bmatrix}i\sigma_2\xi(x)^*\\ \xi(x)\end{bmatrix}\tag{3.101}$$

は，(3.100 b) を満たすことが示せる．上式から明らかなように，N は見かけ上4成分スピノールであるが，独立な成分は二つしかない．ξ と η に対するディラック方程式をワイル表示で書き下ろすと，

$$(\partial_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\xi-m\sigma_2\xi^*=0\tag{3.102 a}$$

$$(\partial_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\eta+m\sigma_2\eta^*=0\tag{3.102 b}$$

これが2成分マヨラナ粒子の満たす方程式である．この式を見ればわかるように，ξ, η はそれぞれ独立でかつ異なる方程式を満たす．(3.92) 式と比較すれば，$m\to 0$ の極限で，ξ, η はそれぞれワイル解 ϕ, χ に一致することがわかる．$m\neq 0$ の場合でも，$m\ll E, p$ ならばワイル解からのズレは小さいから，ξ, η は，それぞれ右巻き，左巻き成分が優勢である．そこで，ξ, η をそれぞれ右巻き左巻きのマヨラナ粒子と呼ぶ．ξ と η はそれぞれ独立な方程式を満たすので，質量が同じである必要はなく，一般的には ξ のもつ質量 m_R と η のもつ質量 m_L は等しくない．

4成分表示のマヨラナ粒子 N を $1\pm\gamma^5$ により右左成分に分離したうえで，

荷電共役を施すと

$$(N_L)^C = C\bar{N}_L{}^T = i\gamma^2\gamma^0\bar{N}_L{}^T = i\gamma^2\{(1-\gamma^5)/2\}N^*$$

$$= \{(1+\gamma^5)/2\}i\gamma^2\gamma^0\bar{N}^T = \{(1+\gamma^5)/2\}N^C = (N^C)_R$$

$$\therefore \quad (N_L)^C = (N^C)_R = N_R$$

$$(N_R)^C = (N^C)_L = N_L \tag{3.103}$$

つまりマヨラナ粒子には，粒子反粒子の区別がなく，左巻きと右巻きの区別があるのみである．この入れ換えは C 変換によっても P 変換によっても起こる．以下 $\phi^C{}_L$ とは，$(\phi^C)_L$ の意味に使うと約束する．つまりディラック粒子であるならば，反粒子の左巻き状態，マヨラナ粒子ならば，単なる左巻き状態の意味である．

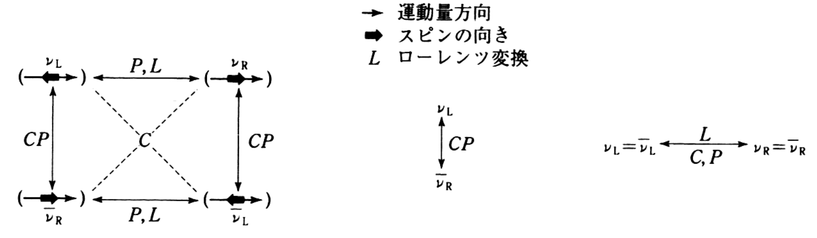
演習 3.21 (a) $-i\sigma_2\eta^*$，$i\sigma_2\xi^*$ が ξ, η と同じ方程式を満たすことを示せ．すなわち，$-i\sigma_2\eta^*, i\sigma_2\xi^*$ の優勢なヘリシティ成分はそれぞれ右巻き，左巻きである．

(b) $m_R = m_L$ であれば，$\phi = (N_1 + iN_2)/\sqrt{2}$ の ϕ_R 成分と ϕ_L 成分は，(3.92) すなわち一般的なディラック方程式を満たすことを示せ，このことから，ディラック粒子は，質量の等しい 2 個のマヨラナ粒子と等価であることがわかる．(実はこのことが，$\phi \to \phi' = \exp(-i\alpha)\phi$, $\phi^\dagger \to \phi'^\dagger = \phi^\dagger\exp(i\alpha)\phi$ という位相変換でラグランジアンが不変となることを保証し，粒子数が保存量となる (第 6 章「対称性と保存則」参照).)

図 3.4 に，ディラック粒子，ワイル粒子，マヨラナ粒子の相互関係をまとめる．

ディラック粒子とマヨラナ粒子を区別する方法

1) ニュートリノがマヨラナ粒子であるならば，レプトン数保存は破れている．したがって，レプトン数保存を破るような反応を見つければよい．ヘリシ



(a) 4 成分ディラック粒子 ($m>0$) の相互変換　(b) ワイル粒子 ($m=0$) の相互変換　(c) マヨラナ粒子 ($m>0$) の相互変換

図 3.4 ニュートリノの三つの可能性

ティに関係なくレプトン数非保存をテストできる最も簡明な反応は，ν を放出しない二重 β 崩壊である．現在までのところ二重 β 崩壊の存在する証拠はなく，マヨラナ粒子が存在したとしても，その質量は～数 eV 以下である[1]．

2) マヨラナ粒子は磁気能率をもてない．したがって，ニュートリノが磁気能率をもつことがわかればそれはディラック粒子である．磁気能率 $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}}$ や電気双極子能率 $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{E}}$ をもつと電磁場と相互作用をし，その相互作用エネルギーは

$$E_{\mathrm{int}}=-\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{m}}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{E}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.104}$$

§6.5 で後述するところの CPT 変換で $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$ は不変であるが粒子のスピンは反転する．マヨラナ粒子であれば，CPT 変換で粒子は自分自身に変わる．つまり $\boldsymbol{\mu}$ は不変である．一方，ハミルトニアンは CPT 変換で不変なので $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{E}}=0$ となる．もっとも，マヨラナ粒子でも異種ニュートリノ間の遷移磁気能率はもつことができる*4)．ディラック粒子であれば，CPT 変換で反粒子となるから $\boldsymbol{\mu}$ の符号は逆転するので，H の不変性は保たれている．標準理論を使った計算では[3]，

$$\mu_\nu \sim \frac{3eG_{\mathrm{F}}}{8\sqrt{2}\pi^2}m_\nu \sim 3\times10^{-19}\ (m_\nu/1\mathrm{eV})\mu_{\mathrm{Bohr}} \tag{3.105}$$

であり，いずれにしろ，事実上観測不可能である．

なお，$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{E}}\neq0$ は，T 保存を破るので通常は考えない．

参考文献

1) Particle Data Group : *Phys. Rev.*, D**54** (1996) 275
2) SK ; Y. Fukuda *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1562
3) K. Fujikawa and R. Shrock : *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980) 963

---

*4) 太陽ニュートリノ問題の説明に使われることがある．

4
場の量子化

4.1 ラグランジアン形式

4.1.1 質点の運動

力学における運動方程式はハミルトンの原理を使って，ラグランジアンから導くことができる．ハミルトンの原理とは，ある質点の座標 $q_1=q(t_1)$ から $q_2=q(t_2)$ に至る運動は，次で定義される“作用 S”を最小にするような軌跡に従うというものである．

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\ \dot{q})\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

$$L=T-V \tag{4.2}$$

ここに T は質点の運動エネルギー，V はポテンシャルエネルギーであり，L をラグランジアンと呼ぶ．座標 q と，速度 $\dot{q}$ は時刻の関数であるから S は関数の関数，すなわち汎関数である．いま，$q(t_1)$ と $q(t_2)$ を固定して $q(t)$ という道筋をわずかに変えると，そのときの S の変化（変分）δS がゼロとなるという条件から

$$\begin{aligned}\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right]\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}\right]\delta q(t)\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで，$\delta\dot{q}(t)=\mathrm{d}\{\delta q(t_1)\}/\mathrm{d}t$ を用いた．$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$ であり，$\delta q(t)$ は任意であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{4.4}$$

というオイラーの運動方程式を得る．これを調和振動子に適用すると，$T=m\dot{q}^2/2$, $V=m\omega^2q^2/2$ であるので

$$L=\frac{m\dot{q}^2}{2}-\frac{m\omega^2q^2}{2} \tag{4.5}$$

から，

$$\ddot{q}=-\omega^2 q \tag{4.6}$$

を得る．ラグランジアン方式の一つのメリットは一般座標で書けるということである．

4.1.2 多体系から場へ

さて，上記の調和振動子が互いに自由で N 個ある場合の力学系への拡張は

$$S=\int\sum_r^N L(q_r,\ \dot{q}_r)\mathrm{d}t \tag{4.7}$$

として，各自由度をもつ q_r について変分をとると N 個のオイラー方程式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \tag{4.8}$$

振動子が時空の各地点にあるときは，自由度 N を無限大にして：

$$\begin{cases} r\ \text{という指標の代わりに} & r\to \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x}\ \text{は 3 次元座標}\ x, y, z\ \text{を示す}) \\ q_r\ \text{の代わりに} & q_r\to\phi(\boldsymbol{x}) \\ \text{和の代わりに積分} & \sum_r\to\int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

とする．したがって，

$$S=\int\left[\int\mathcal{L}\left(\phi(\boldsymbol{x}),\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]\mathrm{d}t\equiv\int\mathcal{L}(\phi(x),\ \dot{\phi}(x))\mathrm{d}^4x$$

となるが，このままでは無限個の独立な振動子が各時空点で勝手に振動しているだけで，時空を伝播していく波動は記述できない．場とは振動子が時空の各点にあり，それぞれが独立の自由度をもち，互いに影響し合いながら振動するときの物理量とも考えられる．影響し合うということは，場 $\phi(x)$ が時空の微小隣接点での場 $\phi(x+\mathrm{d}x)$ と関係している（結合する）ということであるから，$\mathcal{L}$ は場の空間微分を含まねばならない．ゆえに

$$\mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x)) \longrightarrow \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \tag{4.9}$$

とする．$\mathcal{L}$ はラグランジアン密度と呼ばれる．ここで変分をとると

$$\delta S = \int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)}\delta(\partial_i\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}^4x$$

ここで第 2，3 項を部分積分するが，有限自由度の力学系には t_1, t_2 での $\delta q(t)$ に境界条件が課せられたのに対し，場の場合は 4 次元的時空のある境界点（通常無限遠）で $\delta\phi(x)=0$ という条件とする．したがって部分積分した項はゼロとなり，

$$\delta S = -\int\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\right\} + \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\right]\delta\phi\,\mathrm{d}^4x = 0$$

$$\therefore\quad \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{4.10}$$

という場に対するオイラー方程式を得る．ラグランジアンは，通常は運動方程式を先に知ってオイラーの方程式が正しい運動方程式を与えるように決める．したがって，ラグランジアンを与えることと，運動方程式を与えることは数学的に同一である．次に述べるハミルトニアンがエネルギーというわかりやすい物理量であるのに反し，ラグランジアンのもつ物理的意味はもう一つはっきりしないが，ラグランジアンはローレンツ変換で不変なスカラー量で相対論的な取扱いが容易なのと，対称性が見やすいなどの利点がある．

第 3 章ではディラック方程式をシュレーディンガー方程式の相対論的拡張として扱い，あたかも 1 体の波動関数であるかのように扱った．これからは，クライン-ゴルドン場，電磁場などをも含めて相対論的波動方程式に従う物理量はすべて“場”と考える．

演習 4.1 実のスカラー場 ϕ，複素スカラー場 φ のクライン-ゴルドン方程式，電磁場 $F^{\mu\nu}$ のマクスウェル方程式，ディラック場 ψ の方程式を与えるラグランジアン密度は，それぞれ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - m^2\phi^2) \tag{4.11 a}$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi \tag{4.11 b}$$

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-qA_\mu j^\mu=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{E}^2)-qA_\mu j^\mu \tag{4.12}$$

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi \tag{4.13}$$

であることを示せ．

質量をもつベクトル場のラグランジアンは，電磁場との類推から

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}+\frac{m^2}{2}W_\mu W^\mu-gW_\mu j^\mu \tag{4.14}$$

$$f^{\mu\nu}=\partial^\mu W^\nu-\partial^\nu W^\mu$$

で与えられる．これから運動方程式は

$$\partial_\mu f^{\mu\nu}+m^2W^\nu=gj^\nu \tag{4.15 a}$$

となる．これをプロカの方程式という．j^ν が保存カレントであるとき，(4.15 a) の発散をとると

$$\partial_\mu W^\mu=0 \tag{4.16}$$

が導けるから，(4.15 a) は

$$\partial_\mu\partial^\mu W^\nu+m^2W^\nu=gj^\nu,\qquad \partial_\mu W^\mu=0 \tag{4.15 b}$$

と同等である．(4.16) は W^μ の独立な成分が 4 個はなく 3 個であること，したがってスピン 1 の粒子に対応することを意味する．ローレンツベクトル場は量子化すればスピン 1 の粒子になるといってもよい．電磁場の場合は，(4.16) はゲージ条件として与えなければならなかったが，質量が有限で保存カレントが存在するときは自動的に満たされることに注意しよう．

4.2 調和振動子の量子化

4.2.1 調和振動子

場の量子化の準備として，量子力学における量子化の手続きを復習しておこう．量子化のときはラグランジアン形式でなくハミルトニアンを使う正準形式が便利である．質点の力学ではハミルトニアンは q と $\dot{q}$ の代わりに，

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{4.17}$$

で定義される正準運動量 p（q の共役運動量ともいう）と q を独立変数として

扱う．この場合

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}=\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+p\delta\dot{q}=\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\delta(p\dot{q})-\dot{q}\delta p$$

そこで

$$H\equiv p\dot{q}-L \tag{4.18 a}$$

を定義すれば

$$\therefore\quad \delta H\equiv\delta(p\dot{q}-L)=-\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\dot{q}\delta p=-\dot{p}\delta q+\dot{q}\delta p \tag{4.18 b}$$

ただし，最右端の第1項を得るためにオイラーの方程式を使った．これより

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.19}$$

が得られる．調和振動子について計算すると，

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2} \tag{4.20}$$

$$\dot{q}=\frac{p}{m},\qquad \dot{p}=-m\omega^2q \tag{4.21}$$

となる．(4.21) は (4.6) と同じであるから調和振動子の運動方程式を再現する．ここで，量子化条件として次の正準交換関係を課し，

$$[q,p]\equiv qp-pq=i \tag{4.22}$$

q, p などの力学変数 O に対しては運動方程式としてはハイゼンベルグの運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t}=i[H,O] \tag{4.23}$$

に従う演算子と見なす．調和振動子の運動方程式 (4.21) はハイゼンベルグの運動方程式 (4.23) を使えば (4.20) のハミルトニアンと (4.22) の交換関係からでてくる．ここで

$$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(q+\frac{i}{m\omega}p\right),\qquad a^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(q-\frac{i}{m\omega}p\right) \tag{4.24}$$

を導入すると，(4.22) の正準交換関係は

$$[a,a^\dagger]=1 \tag{4.25}$$

(4.20) のハミルトニアンは

$$H=\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right) \tag{4.26}$$

となり，書き換えたハミルトニアン (4.26) をハイゼンベルグの運動方程式に入れると，

$$\dot{a}=-i\omega a, \qquad \dot{a}^\dagger=i\omega a^\dagger \tag{4.27}$$

を得る．

(4.25), (4.26) の物理的意味を明らかにするには，エルミート演算子

$$N\equiv a^\dagger a \tag{4.28}$$

の固有値 n をもつ固有状態 $|n\rangle$ を考える．

$$N|n\rangle=n|n\rangle \tag{4.29}$$

(4.25) の交換関係により

$$Na^\dagger|n\rangle=a^\dagger aa^\dagger|n\rangle=a^\dagger(1+a^\dagger a)|n\rangle=(n+1)a^\dagger|n\rangle \tag{4.30}$$

$$Na|n\rangle=a^\dagger aa|n\rangle=(aa^\dagger-1)a|n\rangle=(n-1)a|n\rangle \tag{4.31}$$

すなわち，$a^\dagger|n\rangle$, $a|n\rangle$ もまた N の固有状態であり，その固有値は $(n\pm1)$ であるので，$a^\dagger, a$ は固有値 n をそれぞれ ±1 だけ変える働きをする演算子である．

$$\langle n|n\rangle=1 \tag{4.32}$$

と規格化されているとし，$a|n\rangle=c_n|n-1\rangle$ とおくと

$$n=\langle n|N|n\rangle=\langle n|a^\dagger a|n\rangle=|c_n|^2\langle n-1|n-1\rangle=|c_n|^2 \tag{4.33}$$

ゆえに適当に位相を選べば，

$$c_n=\sqrt{n} \tag{4.34}$$

ととれる．(4.30), (4.31) より，$a^\dagger, a$ は，$|n\rangle$ と $|n\pm1\rangle$ の間でのみ，行列要素がゼロでない．

$$\langle n-1|a|n\rangle=c_n=\langle n|a^\dagger|n-1\rangle$$

$$\therefore\quad |n\rangle=a^\dagger|n-1\rangle/c_n=(a^\dagger)^2|n-2\rangle/(c_nc_{n-1})\cdots$$

$$\cdots=\frac{(a^\dagger)^m}{c_n\cdots c_{n-m+1}}|n-m\rangle \tag{4.35}$$

a を何回も作用すると，いずれは固有値が負となるが，(4.33) によって $n\geqq0$ であるから，矛盾を避けるためには最小の固有値 $n=0$ をもつ固有状態 $|0\rangle$ が存在し，

$$a|0\rangle=0, \qquad N|0\rangle=0 \tag{4.36}$$

が必要となる．いったん $|0\rangle$ が決められると，任意の固有状態は，$|0\rangle$ に $a^\dagger$ を掛けて得られ，固有値 n は正の整数となる．

$$\therefore \quad |n\rangle=\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \qquad N|n\rangle=n|n\rangle \tag{4.37}$$

$$H|n\rangle=\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)|n\rangle=\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle \tag{4.38}$$

となり，エネルギーは ω の整数倍の値だけ許される．1体の調和振動子を考える限り，これはエネルギー間隔が等しいという事実を示すにすぎないが，ここで重要な再解釈を行うと，場の量子論に移行することができる．すなわち1個の粒子のエネルギーが n 倍となるのではなく，エネルギー ω をもつ粒子が n 個生成されると考えるのである．そうすると，$N=a^\dagger a$ は粒子の数を表し，$H=\omega(n+1/2)$ はエネルギー ω の粒子が n 個存在するときのハミルトニアンを表すことになる．この粒子は，同じエネルギー状態（一般的には任意の量子数が同一の状態）に，任意の数の粒子が存在できるのでボーズ統計に従う粒子である．

ハイゼンベルグの運動方程式を基礎におけば，q の従う方程式は (4.20) のハミルトニアンと (4.22) の正準交換系から導かれ（セット A)，(4.27) の a, $a^\dagger$ の従う方程式は (4.26) のハミルトニアンと (4.25) の交換関係から導かれる（セット B)．両者は (4.24) で結びついていてどちらから出発しても他方を再現できるので同等である．したがって，セット B をもって調和振動子であるための条件と見なすこともできる．

4.2.2 フェルミ粒子

ここでセット B から粒子像を得るには $a, a^\dagger$ の交換関係の条件 (4.25) は必ずしも必要でないことに注目する．(4.25) の代わりに

$$\begin{aligned}\{a, a^\dagger\}&\equiv aa^\dagger+a^\dagger a=1\\ \{a, a\}&=\{a^\dagger, a^\dagger\}=0\end{aligned} \tag{4.39}$$

という反可換的交換関係を要求すると

$$N^2=a^\dagger aa^\dagger a=a^\dagger(1-a^\dagger a)a=a^\dagger a=N$$

$$\therefore \quad N(N-1)=0 \longrightarrow N=0 \text{ または } 1 \tag{4.40}$$

となり，N は 1 または 0 という固有値しかとれないものの（フェルミ統計に従う粒子），エネルギー量子が導けることには変わりがない．この $a, a^\dagger$ で表現したハミルトニアンにハイゼンベルグの運動方程式を使うと通常の交換関係 (4.25) を要求したときと同じ運動方程式 (4.27) が導け，したがって (4.24) の関係式を通じて，もともとの調和振動子 q の運動方程式 (4.21) を再現するので，これもまた調和振動子であり，はじめに定義した $a, a^\dagger$ と同等の資格がある．しかし，このときは

$$H=i\omega qp, \quad \{q, p\}=0, \quad p^2=\frac{m\omega}{2}, \quad q^2=\frac{1}{2m\omega} \tag{4.41}$$

であるので古典的対応がなく，純粋に量子力学的な概念である．

4.3 場の量子化

ここでクライン-ゴルドン方程式に従う複素場 $\phi(x)$ の量子化を試みよう．

$$(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi(x)=0 \tag{4.42}$$

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-m^2\phi^\dagger\phi) \tag{4.43}$$

ラグランジアンが求められていれば，エネルギー H や運動量 $\boldsymbol{P}$ および他の保存量（電荷 Q）は計算できる．保存量の一般的な導き方は第 6 章“対称性と保存則”のところで行うが，ここではさしあたり保存量は与えられているとして話を進めよう．ラグランジアンが (4.43) で与えられる複素場の保存量はエネルギー，運動量，電荷（単位電荷を q とする．電子の場合 $q=-e$）の三つある．

$$H=\int d^3x\left[\left(\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+(\nabla\phi^\dagger)\cdot(\nabla\phi)+m^2\phi^\dagger\phi\right] \tag{4.44 a}$$

$$\boldsymbol{P}=-\int d^3x\left[\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial t}\nabla\phi+\nabla\phi^\dagger\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] \tag{4.44 b}$$

$$Q=-iq\int d^3x\left[\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial t}\phi-\phi^\dagger\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] \tag{4.44 c}$$

演習 4.2 (4.43) の複素場は，$\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}$，$\phi^\dagger=(\phi_1-i\phi_2)/\sqrt{2}$ と分解することにより，質量の等しい 2 個の実場と同等であることを示せ．

演習 4.3 上記の量が保存量であることを示せ.

ϕ をフーリエ展開して

$$\phi=\sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}c_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{4.45 a}$$

とおく. 分母の $(2\pi)^3 2\omega$ は, 特別な意味はなく規格条件により変わる因子である. 本書では, 相対論的波動関数を体積 V の中に 2ω 個の粒子があるようにする規格化条件を採用し, 場の演算子が整合するように決める*1). (4.42) のクライン-ゴルドン方程式に入れると, 展開係数の $c_{\boldsymbol{k}}$ は,

$$\ddot{c}_{\boldsymbol{k}}(t)=-\omega^2 c_{\boldsymbol{k}} \tag{4.46}$$

$$\omega^2=\boldsymbol{k}^2+m^2 \tag{4.47}$$

という調和振動子の式に従う. そこで $c_{\boldsymbol{k}}$ を正と負の振動部分に分けて改めて $c_{\boldsymbol{k}}, d_{\boldsymbol{k}}$ とおくと,

$$c_{\boldsymbol{k}}(t)=c_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-i\omega t},\qquad d_{\boldsymbol{k}}(t)=d_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{4.48}$$

と書けるから, (4.45 a) は次のようになる.

$$\phi=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\left(c_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-i\omega t}+d_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{i\omega t}\right)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{4.45 b}$$

これを, (4.44) のハミルトニアンなどに代入して, 直交条件

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}=(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{4.49}$$

を使うと,

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\omega(c_{\boldsymbol{k}}^\dagger c_{\boldsymbol{k}}+d_{\boldsymbol{k}}^\dagger d_{\boldsymbol{k}}) \tag{4.50 a}$$

$$\boldsymbol{P}=\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}(c_{\boldsymbol{k}}^\dagger c_{\boldsymbol{k}}-d_{\boldsymbol{k}}^\dagger d_{\boldsymbol{k}}) \tag{4.50 b}$$

$$Q=\sum_{\boldsymbol{k}}q(c_{\boldsymbol{k}}^\dagger c_{\boldsymbol{k}}-d_{\boldsymbol{k}}^\dagger d_{\boldsymbol{k}}) \tag{4.50 c}$$

と書き換えられる. ただし, $\sum_{\boldsymbol{k}}$ は $\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}$ を意味するものとする.

---

*1) 波動関数を有限な体積 $V=L^3$ で規格化すると k_x, k_y, k_z は離散値 $2\pi n/L$ ($n=0,1,2,\cdots$) という値をとり可算である. 体積を無限大にもっていくと k は連続値をとり, 和は状態密度を掛けた上での積分となる.

$$\sum_{\boldsymbol{k}}\to\int \mathrm{d}^3k(V/(2\pi)^3\cdot 2\omega)$$

またこのとき $\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\to(2\pi)^3 2\omega\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$. ここに, 2ω は体積 V 中に 2ω 個の粒子があるという規格を採用したことによる規格因子である (§5.3 参照). 体積は最終的な式からは常に落ちるので簡単のため $V=1$ とおく.

ここでオイラー運動方程式をハイゼンベルグの運動方程式

$$\dot{c}=i[H, c]$$

から導くために

$$[c_k, c_{k'}^\dagger]=[d_k, d_{k'}^\dagger]=\delta_{kk'}=(2\pi)^3 2\omega\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{4.51}$$

$$[c_k, d_{k'}^\dagger]=[d_k, c_{k'}^\dagger]=0$$

$$[c_k, c_{k'}]=[c_k^\dagger, c_{k'}^\dagger]=0$$

$$[d_k, d_{k'}]=[d_k^\dagger, d_{k'}^\dagger]=0$$

を要求する．

$$N\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}(c_k^\dagger c_k+d_k^\dagger d_k)=\sum_k(c_k^\dagger c_k+d_k^\dagger d_k) \tag{4.52}$$

を定義すると，

$$[N, c_k^\dagger]=c_k^\dagger, \qquad [N, d_k^\dagger]=d_k^\dagger \tag{4.53 a}$$

$$[N, c_k]=-c_k, \qquad [N, d_k]=-d_k \tag{4.53 b}$$

であるので，$c_k^\dagger, c_k, \cdots$ は，前と同じ議論に従い，生成，消滅演算子と解釈できる．このときエネルギーの固有値がどうなるかを調べるために，ϕ の運動方程式に，エネルギー固有状態を掛けた式で

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}|E\rangle=i[H, \phi]|E\rangle \tag{4.54}$$

で，$\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t}$ または $\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega t}$ の係数を比べると

$$-i\omega c_k|E\rangle=i[H, c_k]|E\rangle=i(H-E)c_k|E\rangle$$

$$i\omega d_k|E\rangle=i[H, d_k]|E\rangle=i(H-E)d_k|E\rangle$$

$$\therefore\quad Hc_k|E\rangle=(E-\omega)c_k|E\rangle \tag{4.55 a}$$

$$Hd_k|E\rangle=(E+\omega)d_k|E\rangle \tag{4.55 b}$$

となり，c_k は，数を一つ減らすと同時に，エネルギーの固有値を ω だけ減らすので，正エネルギー粒子の消滅演算子である．一方，d_k は数を一つ減らすと同時に，エネルギーを $-\omega$ だけ減らしている．つまりこのままでは負エネルギー粒子の消滅演算子ということになる．エネルギーは増えているのであるから d_k は正エネルギー粒子の生成演算子と解釈し直さなければならない．そのためには，$d_{-k}\to d_k^\dagger$, $d_{-k}^\dagger\to d_k$ と書き換え，この新しい $d_k, d_k^\dagger$ について (4.51) の交換関係が成り立つとする．$-k$ としたのは (4.50 b) を見ればわか

るように，もともとの d_k は負の運動量の消滅演算子であるから，正のエネルギー，正の運動量の生成演算子を与えるようにしたのである．新しい演算子で書き直したものは，

$$\phi=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\left[c_k \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t}+d_k{}^\dagger \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega t}\right] \tag{4.56}$$

$$H=\sum_k \omega(c_k{}^\dagger c_k+d_k{}^\dagger d_k+1) \tag{4.57 a}$$

$$\boldsymbol{P}=\sum_k \boldsymbol{k}(c_k{}^\dagger c_k+d_k{}^\dagger d_k+1) \tag{4.57 b}$$

$$Q=\sum_k q(c_k{}^\dagger c_k-d_k{}^\dagger d_k-1) \tag{4.57 c}$$

となり，$d_k{}^\dagger$ が生成する粒子は正のエネルギーと正の運動量をもち，電荷が反対の粒子という性質をもつ．すなわち反粒子である．ここに現れた定数項は零点振動と呼ばれるもので，単純に足しあげると無限大となるが，零点振動を含むエネルギーが真空のエネルギーと考え，それからの差を物理量と見なすので，通常は落として考える．

(4.56) からわかるように，ϕ は粒子数の 1 個異なる状態の間を結び付ける演算子である．特に真空と 1 粒子状態の行列要素はよく使われる．

$$c_k|0\rangle=\langle 0|c_k{}^\dagger=0,$$
$$\langle 0|c_k|k\rangle=\langle k|c_k{}^\dagger|0\rangle=1$$

を考慮すれば，

$$\langle 0|\phi(x)|k\rangle=\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t},\qquad \langle k|\phi(x)|0\rangle=\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega t} \tag{4.58}$$

演習 4.4

$$\begin{aligned}|E\rangle&=|k_1, k_2, \cdots, k_m, q_1, q_2, \cdots, q_n\rangle\\ &\equiv c_{k_1}{}^\dagger c_{k_2}{}^\dagger\cdots c_{k_m}{}^\dagger d_{q_1}{}^\dagger d_{q_2}{}^\dagger\cdots d_{q_n}{}^\dagger|0\rangle\end{aligned} \tag{4.59 a}$$

は，粒子数が m，反粒子数が n で，エネルギー運動量が

$$E=\omega_{k_1}+\cdots+\omega_{k_m}+\omega_{q_1}+\cdots+\omega_{q_n} \tag{4.59 b}$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{k}_1+\cdots+\boldsymbol{k}_m+\boldsymbol{q}_1+\cdots+\boldsymbol{q}_n \tag{4.59 c}$$

の固有状態であることを示せ．

こうしてつくった任意の粒子数の状態関数をフォックベクトル，フォックベクトルの全体をフォック空間という．

以上の議論からわかるように，相対論的波動方程式では負エネルギーの粒子の取扱いが苦しかったが，それを古典的な場と再解釈し，場を量子化（第 2 量

子化）したものについては，そのような困難はないことがわかる．**ϕ はもはや波動関数ではなく演算子である．** $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t)$ と展開できるところに波動像があり，その係数 c_k, d_k が粒子数 n の平方根と解釈できるような演算子であるところに粒子像が入っている．

演習 4.5*

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \phi(\boldsymbol{y},t)]=[\phi^\dagger(\boldsymbol{x},t),\ \phi^\dagger(\boldsymbol{y},t)]=0$$
$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \partial_t\phi^\dagger(\boldsymbol{y},t)]=i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.60}$$

を証明せよ．

この本で行ったように調和振動子に分けてから量子化をする方法でなく，ラグランジアン密度から直接に正準共役量を求め，以下のような正準交換関係を要求して量子化をすることもできる．

$$\pi(x)\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi(x))}=\partial_t\phi^\dagger(x) \tag{4.61}$$

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{y},t)]=i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$[\phi(x),\phi(y)]=[\pi(x),\pi(y)]=0 \tag{4.62}$$

(4.60) が示すように結果は同じであり，慣れればこちらの方が簡明である．

4.4 電磁場の量子化

電磁場ポテンシャルは，マクスウェルの方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=\partial_\mu\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)=qj^\nu \tag{4.63}$$

に従う．ゲージ変換の自由度

$$A^\mu\longrightarrow A^\mu+\partial^\mu\chi \tag{4.64 a}$$

があるので，通常はローレンツ条件

$$\partial_\mu A^\mu=0 \tag{4.65 a}$$

を課す．こうしてもなおかつ

$$A^\mu\longrightarrow A^\mu+\partial^\mu\phi,\quad \text{ただし}\quad \partial_\mu\partial^\mu\phi=0 \tag{4.64 b}$$

の自由度があり，(4.65 a) のローレンツ条件と余分のゲージ変換自由度 (4.64 b) によって，自由な電磁場（源が存在しない，すなわち，$j^\mu=0$ のときの方程式を満たす A^μ）は見かけ上 4 成分でも実質は 2 成分しかもたないことがいえ

る．電磁場は電荷をもたない実場であるので，フォトンの偏極ベクトルを $\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)$ と書いて

$$A^{\mu}=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\sum_{\lambda}\Big[\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)a(k,\lambda)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t}+\varepsilon^{\mu *}(k,\lambda)a^{\dagger}(k,\lambda)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega t}\Big] \tag{4.66}$$

のように展開する．(4.64 b) は，

$$\varepsilon^{\mu}\longrightarrow\varepsilon^{\mu}+ik^{\mu}\phi(k),\qquad k^2=k_{\mu}k^{\mu}=0 \tag{4.64 c}$$

としてもよいということであるから，$\varepsilon^0=0$ になるように ϕ を選べば，(4.65 a) によって，

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=0 \tag{4.65 b}$$

となり，自由な電磁場は，横方向の偏極しかもたない．すなわち自由度は 2 しかない．

クーロンゲージと共変ゲージ　電磁場の量子化の取扱いはゲージの自由度があるためかなり面倒である．物理的あるいは直観的に最もわかりやすいのは，最初から自由度を最小限に止めるクーロンゲージである．このときは，ポテンシャルに対して

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{4.67}$$

という制限を課す．このときは，2 個の独立な横波成分 $\boldsymbol{A}_{\perp}$ と瞬間的なクーロン相互作用ですべての電磁現象を記述できる (付録 B)．このゲージではローレンツ共変性が明白でないが，詳細な計算によれば必ず成立している．

しかし一般的な取扱いでの計算が面倒なので，共変性を維持する方策を考える．このため，ローレンツ条件ははずし 4 個の独立な場の演算子 A^{μ} が存在するとして，フォトンは四つの独立な偏極状態をもつように扱うことにする．ただし運動方程式としては，ローレンツ条件を課したときのマクスウェル方程式

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}=qj^{\nu} \tag{4.68}$$

に一致するように，ラグランジアンに

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2-qj_{\mu}A^{\mu} \tag{4.69}$$

の第 2 項のような付加項をつけておく．この付加項はゲージ不変ではない．したがって，演算子 A^{μ} に対して，$\partial_{\mu}A^{\mu}=0$ の条件は課していないものの，ゲー

ジ変換の自由はなくゲージは固定されている．このようなゲージをファインマンゲージという．

フォトンの運動方向を z 軸にとったときの座標系では，4 個の独立な偏極ベクトル $\varepsilon^\mu(\lambda)$ を次のように選ぶことができる．

$$\varepsilon^\mu(+)=(0;-1/\sqrt{2},-i/\sqrt{2},0) \tag{4.70 a}$$

$$\varepsilon^\mu(-)=(0;1/\sqrt{2},-i/\sqrt{2},0) \tag{4.70 b}$$

$$\varepsilon^\mu(0)=(0;0,0,1) \tag{4.70 c}$$

$$\varepsilon^\mu(s)=(1;0,0,0) \tag{4.70 d}$$

$\varepsilon(0)$ の偏極をもつフォトンを縦波フォトン，$\varepsilon(s)$ の偏極をもつフォトンをスカラーフォトンという．明らかに

$$\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon^\mu(\rho)^*=g_{\lambda\rho} \tag{4.71}$$

完全性の条件は，ローレンツ計量に合わせて偏極の和を $\lambda=s$ のところだけ符号を変えてとり，

$$\sum_\lambda g_{\lambda\lambda}\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^*=g^{\mu\nu} \tag{4.72}$$

とする．

量子化すると (4.65) のローレンツ条件は，場の量の交換関係と矛盾が生じるので*2)，演算子としてはゲージ条件のない四つの独立な場として扱うが，物理的に意味のある成分は二つしかありえない．そこでローレンツ条件として演算子の式でなく観測状態 $|\Phi\rangle$ と $\langle\phi'|$ に対する条件

$$\langle\phi'|\partial_\mu A^\mu|\Phi\rangle=0 \tag{4.73}$$

を課し，不要な成分を除去する．こうした議論を数学的に厳密に取り扱うとかなり面倒となる上，本書の取扱い範囲とはあまり関係のない理論的な問題なのでここでは深入りはせず，後の議論に必要なところだけ抽出しておく[1]．

こうして持ち込んだ余分の偏極のおかげで，計算途中では不必要な量が現れるが，観測にかかる物理量の期待値は，(4.73) によってつじつまが合うようになっている．したがって，フォトンの偏極状態の和は，共変ゲージでは物理的に意味のある横偏極のみならず，形式的にすべての和 ($\lambda=0\sim3$) をとる必要

---

*2)
$$[A^\mu(x),\ \dot{A}^\nu(y)]_{t_x=t_y}=-ig^{\mu\nu}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
という式と，$\partial_\mu A^\mu=0$ は両立しない．

があるということである．すなわち

$$\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\nu}(\lambda)^{*}=\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\longrightarrow -\sum_{\lambda=0}^{3}g_{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\nu}(\lambda)^{*}=-g^{\mu\nu} \tag{4.74}$$

とする．フォトンが仮想粒子として現れる中間状態では $k^2=k_\mu k^\mu\neq0$ で (4.64 c) の条件が満たされず縦波成分が寄与するので，クーロンゲージでの取扱いと差がでる．このときの共変ゲージでの状況を見るためには，散乱振幅の中で考える．フォトンが中間状態に現れるときは，通常次のように保存カレントに挟まれている（第5章；QED, eμ 散乱行列の式 (5.69) 参照）ことに着目する．

$$\mathcal{M}\sim j_\mu\frac{g^{\mu\nu}}{k^2}j_\nu \tag{4.75}$$

保存カレントは

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0\longrightarrow k_\mu j^\mu(k)=0 \tag{4.76 a}$$

を満たすので，$\boldsymbol{k}$ の方向を z 軸にとる座標系で

$$k^0 j^0-|\boldsymbol{k}|j^3=0\longrightarrow j^3=(k^0/|\boldsymbol{k}|)j^0 \tag{4.76 b}$$

であるので，(4.75) は

$$\frac{-j_\mu j^\mu}{k^2}=\frac{1}{k^2}\Big[\underbrace{-g_{\mu0}g_{\nu0}}_{\text{スカラー}}+\underbrace{\frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}}_{\text{縦波}}+\underbrace{\Big(\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}\Big)}_{\text{横波成分}}\Big]j^\mu j^\nu \tag{4.77 a}$$

$$=\frac{\boldsymbol{j}_\perp\cdot\boldsymbol{j}_\perp+(k^{02}/|\boldsymbol{k}|^2-1)j^{02}}{k^2}=\frac{\boldsymbol{j}_\perp\cdot\boldsymbol{j}_\perp}{k^2}+\frac{j^0 j^0}{|\boldsymbol{k}|^2}$$

$$j_{\perp i}=j_i-\frac{k_i}{|\boldsymbol{k}^2|}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}),\qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}_\perp=0 \tag{4.77 b}$$

となる．第1項は横波フォトンの寄与するところであり，第2項は，瞬間的なクーロンポテンシャルの寄与である（$1/|\boldsymbol{k}|^2$ は瞬間的つまり時間を含まないクーロンポテンシャルのフーリエ変換である）．クーロンゲージでは，第2項は量子化しないで最初から分けて取り扱う部分である．共変ゲージでは分けない代わりに，スカラーフォトンと縦波フォトンの部分に取り入れられていることになる．

実のフォトンが出入りする反応での偏極和は (4.74) のようにすべての偏極について和をとっても，横偏極成分しか効かないことは，後のコンプトン散乱

の実例（§5.6.2参照）で示す．

以上のことに留意しておけば，電磁場の量子化はクライン-ゴルドンの方程式に従うスカラー場に準じて行うことになる．

4.5 ディラック場の量子化

ディラック方程式のラグランジアン (4.13) から，ハミルトニアン，運動量，電流をつくり場の量で表すと，

$$H=\int d^3x\ \psi^\dagger(-\boldsymbol{\alpha}\cdot i\nabla+\beta m)\psi=\int d^3x\ \psi^\dagger i\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{4.78 a}$$

$$\boldsymbol{P}=\int d^3x\ \psi^\dagger(-i\nabla)\psi \tag{4.78 b}$$

$$qJ^\mu=q\int d^3x\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=q\int d^3x\ \psi^\dagger(1;\boldsymbol{\alpha})\psi \tag{4.78 c}$$

で与えられる．電荷は電流の第0成分であるから，$Q=qJ^0$ となる．次に，ディラック場を

$$\psi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_r\left[a_{pr}u_r(p)e^{ip\cdot x-iEt}+b_{pr}{}^\dagger v_r(p)e^{-ip\cdot x+iEt}\right] \tag{4.79 a}$$

$$\bar{\psi}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_r\left[a_{pr}{}^\dagger\bar{u}_r(p)e^{-ip\cdot x+iEt}+b_{pr}\bar{v}_r(p)e^{ip\cdot x-iEt}\right] \tag{4.79 b}$$

のように展開して，$H, \boldsymbol{P}, Q$ を書き直すと，

$$H=\sum_p E(a_p{}^\dagger a_p-b_pb_p{}^\dagger) \tag{4.80 a}$$

$$P=\sum_p \boldsymbol{p}(a_p{}^\dagger a_p-b_pb_p{}^\dagger) \tag{4.80 b}$$

$$Q=\sum_p q(a_p{}^\dagger a_p+b_pb_p{}^\dagger) \tag{4.80 c}$$

となる．ここに和は運動量とスピン双方についてとるものとする．(4.50) に続く議論と同じ論理を適用すると，$a_p, b_p{}^\dagger$ に反可換交換関係を採用すれば，エネルギーは正定値をとり物理的解釈に矛盾はないが，通常の交換関係を採用すると負エネルギー状態が出現して矛盾が起きることがわかる．したがって，ディラック場の量子はフェルミ統計に従う粒子でなければならない．この議論を一般化すると次のよく知られたスピンと統計の関係

スピンと統計の関係：スピンが整数の粒子はボーズ統計に従い，半整数の粒子はフェルミ統計に従う．

が導ける．以上の議論から，スピンと統計の関係は場の量子論では必然的に導けることがわかる．

演習 4.6 (4.78) から (4.80) を導け．

4.6 ディラック粒子と電磁場の相互作用

ディラック方程式のところでみたように，電子 $(q=-e)$ との相互作用は，ゲージ原理 $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$ で与えられるから，相互作用ハミルトニアンは，

$$\mathcal{H}_{\rm I} = -\mathcal{L}_{\rm INT} = -ej^\mu A_\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{4.81}$$

始状態がエネルギー運動量 p である電子と，終状態が p' の電子と運動量 k，偏極 λ のフォトンであるときの期待値は，

$$\begin{aligned}&\langle p', k;\lambda|\mathcal{H}_{\rm I}(x)|p\rangle\\ &= -e\langle p'|\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)|p\rangle\langle k;\lambda|A_\mu(x)|0\rangle\end{aligned} \tag{4.82}$$

ただし，フォック空間は電子とフォトンで独立であるので分けて書いた．電磁場の期待値は，簡単に計算できて，

$$\langle k;\lambda|A_\mu(x)|0\rangle = \varepsilon_\mu(k,\lambda)^* {\rm e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega t} \tag{4.83}$$

電流の期待値は，$|p\rangle \sim a_p{}^\dagger|0\rangle$, $\langle p'| \sim \langle 0|a_{p'}$ を考慮すると

$$\langle 0|a_{p'}a_s{}^\dagger a_t a_p{}^\dagger|0\rangle$$

のような 4 個の演算子の期待値を計算しなければならない．ただし，ここで p, t, s は運動量の他にスピンをも含めるものとし，積分するときはスピン和を含めるものとする．

$$\begin{aligned}a_t a_p{}^\dagger|0\rangle &= [\{a_t, a_p{}^\dagger\} - a_p{}^\dagger a_t]\,|\,0\rangle = (2\pi)^3 2E\delta^3(t-p)|0\rangle\\ \langle 0|a_{p'}a_s{}^\dagger &= \langle 0\,|\,[\{a_{p'}, a_s{}^\dagger\} - a_s{}^\dagger a_{p'}] = \langle 0|(2\pi)^3 2E'\delta^3(s-p')\end{aligned} \tag{4.84}$$

右側の式は，消滅演算子を左から真空ベクトル $|0\rangle$ に，生成演算子を右から真空ベクトル $\langle 0|$ に演算すると 0 になることを利用した．結局

$$\langle 0|a_{p'}a_s{}^\dagger a_t a_p{}^\dagger|0\rangle = (2\pi)^6\cdot 4EE'\delta^3(t-p)\delta^3(s-p') \tag{4.85}$$

となるので，t, s について積分すれば

$$\langle p'|\bar{\psi}\gamma^\mu\psi|p\rangle = \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p){\rm e}^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}-i(E-E')t} \tag{4.86}$$

したがって，

$$\langle p', k ; \lambda | \mathcal{H}_{\rm I}(x) | p \rangle$$
$$= -e\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)\varepsilon_{\mu}(k, \lambda)^{*}{\rm e}^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}-i(E-E'-\omega)t}$$
$$= -e\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)\varepsilon_{\mu}(k, \lambda)^{*}{\rm e}^{-i(p-p'-k)x} \qquad (4.87\,{\rm a})$$

この行列要素は図 4.1 (a) に対応する．ここで着目すべきことは指数関数の肩に現れる 4 元運動量の符号である．入射して消滅する粒子の 4 元運動量の符号は負，生成されて外へ出ていく粒子の 4 元運動量の符号は正となっていることがわかる．ハミルトニアンはいずれ時空で積分するので，この指数関数からは δ-関数が出現する．すなわち，4 元運動量は相互作用の各点で保存することに注意しよう．

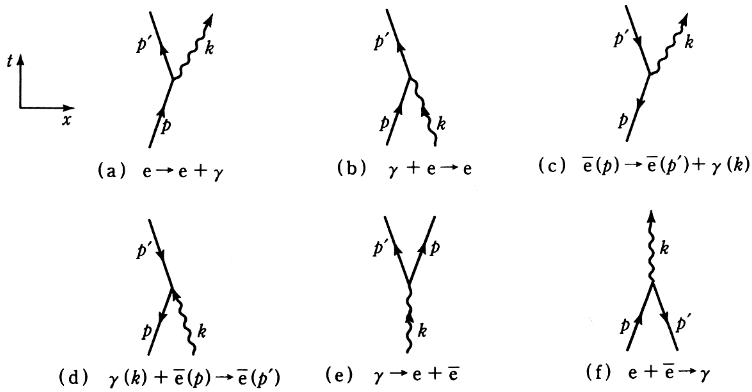


図 4.1　$\mathcal{L}_{\rm INT} = -qA_{\mu}j^{\mu}$ の相互作用最低次の行列要素
時間は上向きに進むものとして，矢印が順方向の場合は粒子，逆方向の場合は反粒子を表す．

$$E = E' + \omega, \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{k}$$

同様に図 4.1 (b) に対応して，

$$\langle p' | \mathcal{H}_{\rm I}(x) | p, k ; \lambda \rangle$$
$$= -e\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)\varepsilon_{\mu}(k, \lambda){\rm e}^{-i(p-p'+k)x} \qquad (4.87\,{\rm b})$$
$$E' = E + \omega, \qquad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}$$

次に反粒子の場合をみてみよう．図の (c) に対応して，

$$\langle \bar{p}', k ; \lambda | \mathcal{H}_{\rm I} | \bar{p} \rangle$$
$$= +e\bar{v}(p)\gamma^{\mu}v(p')\varepsilon_{\mu}(k, \lambda)^{*}{\rm e}^{-i(p-p'-k)x} \qquad (4.87\,{\rm c})$$

となる．ここでも指数関数の肩の 4 元運動量の符号は正しく入射放出に対応し

て付けられており，粒子反粒子の区別には関係がない．反粒子が時間を逆行する粒子との解釈の名残は $\bar{v}(p)\gamma^{\mu}v(p')$ の順序に現れている．また上式で，陽電子の散乱には電子とは正反対の符号が正しく付いていることに注意しよう．この項は，$\bar{\psi}$ の正の振動項 $b_s\bar{v}(s)$, ψ の負の振動項 $b_t{}^{\dagger}v(t)$ の積からでてくるもので

$$\langle \bar{p}'(t)|b_s b_t{}^{\dagger}|\bar{p}(s)\rangle = \langle \bar{p}'(t)|\{b_s b_t{}^{\dagger}\} - b_t{}^{\dagger} b_s|\bar{p}(s)\rangle$$
$$= \langle \bar{p}'(t)|\mathrm{const.}\ \delta^3(s-t) - b_t{}^{\dagger} b_s|\bar{p}(s)\rangle$$

演算子の反交換関係が正しい電荷の符号を与えるのであるが，同時に第1項のような発散積分をも与える．この第1項はハミルトニアンの定数項と同じく，物理的に寄与しないとして，$\bar{\psi}\psi$ の積の中の $b_s b_t{}^{\dagger}$ のような項は，はじめから $b_t{}^{\dagger}b_s$ のように，左側に生成演算子，右側に消滅演算子がくるように並んでいるものと約束する（場の量子理論で N 積といわれる）．

最後に，図4.1 (e) に対応する電子陽電子対生成の場合は

$$\langle p, \bar{p}'|\mathcal{H}_1|k;\lambda\rangle = e\bar{u}(p')\gamma^{\mu}v(p)\varepsilon_{\mu}(k,\lambda)\mathrm{e}^{-i(k-p-p')x} \qquad (4.87\,\mathrm{d})$$

となる．

4.7 ファインマンの伝播関数

a. 光子の伝播関数

散乱行列を計算するときに，ファインマンの伝播関数という次の式で定義される量がよくでてくる．

$$iD_{\mathrm{F}\mu\nu}(x_1-x_2) \equiv \langle 0|T(A_{\mu}(x_1)A_{\nu}(x_2))|0\rangle$$
$$= \begin{cases} \langle 0|(A_{\mu}(x_1)A_{\nu}(x_2))|0\rangle & t_1 > t_2 \\ \langle 0|(A_{\nu}(x_2)A_{\mu}(x_1))|0\rangle & t_1 < t_2 \end{cases} \qquad (4.88\,\mathrm{a})$$

$T(\cdots)$ は時間の順序を考慮した演算子積で，T 積と呼ばれる量である．(4.88 a) 式の $A_{\mu}(x_1)$ と $A_{\nu}(x_2)$ の間に完全系 $\sum|n\rangle\langle n|=1$ を入れてみて，$|n\rangle$ として1フォトン状態しか寄与しないことから

$$\langle 0|T(A_{\mu}(x_1)A_{\nu}(x_2))|0\rangle$$
$$= \sum_{\lambda}\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 2\omega} T(\langle 0|A_{\mu}(x_1)|q\lambda\rangle\ \langle q\lambda|A_{\nu}(x_2)|0\rangle) \qquad (4.88\,\mathrm{b})$$

となるが，

$$\langle 0|A_\mu(x_1)|q\lambda\rangle=\varepsilon_\mu(\lambda)\mathrm{e}^{-iqx_1}$$
$$\langle q\lambda|A_\nu(x_2)|0\rangle=\varepsilon_\nu(\lambda)^*\mathrm{e}^{+iqx_2} \tag{4.89}$$

$$\sum_\lambda\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^*=\sum_\lambda(-g^{\lambda\lambda})\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^*=-g_{\mu\nu}{}^{*3)} \tag{4.90}$$

を考慮すると (4.88 a) は

$$\langle 0|T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2))|0\rangle$$
$$=-g_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2\omega}\{\theta(t_1-t_2)\mathrm{e}^{-iq(x_1-x_2)}+\theta(t_2-t_1)\mathrm{e}^{+iq(x_1-x_2)}\} \tag{4.88 c}$$

ただし

$$\theta(t)=1\quad(t>0),\qquad \theta(t)=0\quad(t<0) \tag{4.91}$$

(4.88 c) 第1項の意味は，過去 $(t_1>t_2)$ に x_2 地点における生成されたフォトンが，x_1 地点において消滅するという意味である．θ 関数が付いている事実は第1項が，x_2 地点で最初につくられた場の伝播を表し，第2項は，x_1 地点からみれば未来のある時点に生じた場の時間的逆行，逆にいえば x_1 地点での場の発生が先に起こり x_2 地点に伝播すること，つまり反作用を表す．この物理的解釈は，D_F が，電磁場のグリーン関数または名は伝播関数 (propagator) に密接に結びついていることを意味する．実際，$D_{\mathrm{F}\mu\nu}(x)$ が，フォトンの満たす方程式

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu(x)=-\Box A^\nu(x)=qj^\nu(x) \tag{4.92}$$

のグリーン関数そのものであることを示そう．(4.92) の解をグリーン関数 $G(x_1, x_2)$ と j^ν を使って表すと次のようになる．

$$A_\mu(x_1)=B_\mu(x_1)+\int\mathrm{d}^4x_2 G_{\mu\nu}(x_1, x_2)qj^\nu(x_2) \tag{4.93}$$

$$\Box G_{\mu\nu}(x_1, x_2)=-g_{\mu\nu}\delta^4(x_1-x_2) \tag{4.94 a}$$

$$\Box B_\mu(x_1)=0 \tag{4.94 b}$$

$B_\mu(x)$ は境界条件により決まる斉次方程式の解である．物理的には，(4.93) は，カレント j^μ という源が，時空 x_2 地点にあると，それが原因となって時空の x_1 なる地点に $A(x_1)$ というポテンシャルをつくると解釈する．これを解くには，

---

*3) 偏極の和は，(4.72) で示したように，ローレンツ計量を考慮して行う．

$$G_{\mu\nu}(x_1, x_2)=\frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4q G(q) e^{-iq(x_1-x_2)} \tag{4.95 a}$$

とおいて，(4.94 a) に代入すると，

$$G(q)=-1/q^2 \tag{4.95 b}$$

古典電磁気学では，結果が原因に先立たないという要請から，$t_1<t_2$ になる領域では $G_{\mu\nu}=0$ になるような境界条件を設定する（遅延関数）．しかし，場の量子論では，エネルギーが負になる領域では時間の逆行を許すように設定しなければならない．境界条件を正しく設置するため，(4.95 b) を (4.95 a) に代入してみると，

$$G(x)\sim\int d^4q e^{-iqx}\frac{1}{q^2}=\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}d^3q\int_{-\infty}^{\infty}dq^0\frac{e^{-iq^0t}}{(q^0)^2-\omega^2} \tag{4.96}$$

e^{-iqx} を，$q^0=\omega=|\boldsymbol{q}|>0$ のときは，通常の進行波を表し，$q^0=-\omega<0$ のときは時間に逆行する波を表すようにするためには，(4.96) の q^0 の積分路を閉じるとき，$t>0$ ならば $q^0=\omega$ の極を，$t<0$ ならば $q^0=-|\omega|$ の極を含むようにしなければならない．これは，ω^2 に微小の虚数部 $i\varepsilon$ をつけ加えることにより実現できる．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}dq^0\frac{e^{-iq^0t}}{(q^0)^2-\omega^2+i\varepsilon}&=\int_{-\infty}^{\infty}dq^0\frac{e^{-iq^0t}}{2\omega}\left(\frac{1}{q^0-\omega+i\varepsilon}-\frac{1}{q^0+\omega-i\varepsilon}\right)\\&=\begin{cases}-2\pi i e^{-i\omega t}/(2\omega) & t>0\\ -2\pi i e^{+i\omega t}/(2\omega) & t<0\end{cases}\end{aligned} \tag{4.97}$$

を使えば，

$$\begin{aligned}G_{F\mu\nu}(x_1, x_2)&=\frac{-g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4q e^{-iq(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{q^2+i\varepsilon}\right)\\&=\frac{ig_{\mu\nu}}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2\omega}\{\theta(t_1-t_2)e^{-iq(x_1-x_2)}+\theta(t_2-t_1)e^{+iq(x_1-x_2)}\}\end{aligned} \tag{4.98}$$

この (4.98) と (4.88 c) と比べて，G_F 関数は，

$$iG_{F\mu\nu}(x_1, x_2)=\langle 0|T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2))|0\rangle=iD_{F\mu\nu}(x_1, x_2) \tag{4.99}$$

となり，ファインマンの伝播関数はグリーン関数そのものであることがわかった．

b. 電子の伝播関数

電子の伝播関数もまた同様にして定義できる．

$$iS_F(x_1-x_2)\equiv\langle 0|T(\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2))|0\rangle$$

$$=\begin{cases} \langle 0|(\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2))|0\rangle & t_1>t_2 \\ -\langle 0|(\overline{\psi}(x_2)\psi(x_1))|0\rangle & t_1<t_2 \end{cases} \tag{4.100}$$

第2式の負号はフェルミオンの反可換性による．中間状態を入れればすぐわかるように，$t_1>t_2$のときは時間を順行する電子が，$t_1<t_2$のときは時間を逆行する電子（時間を巡行する陽電子）が中間状態として寄与する．中間状態について和をとれば，フォトン伝播関数のときとまったく同じようにして，

$$\begin{aligned} iS_F(x_1, x_2) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\Big[\theta(x_1-x_2)\sum_r u_r(p)\,\bar{u}_r(p)e^{-ip(x_1-x_2)} \\ &\qquad -\theta(x_2-x_1)\sum_r v_r(p)\,\bar{v}_r(p)e^{ip(x_1-x_2)}\Big] \\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\Big[\theta(x_1-x_2)(\not{p}+m)e^{-ip(x_1-x_2)} \\ &\qquad +\theta(x_2-x_1)(-\not{p}+m)e^{ip(x_1-x_2)}\Big] \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip(x_1-x_2)}\left[\frac{(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}\right] \end{aligned} \tag{4.101}$$

ただし，$\theta(x_1-x_2)$は，$\theta(t_1-t_2)$を意味する．(4.101)はフォトンの伝播関数(4.88 c)で偏極和をスピン和で置き換え質量を有限にした形となっている．

$$\frac{\sum\varepsilon_\lambda{}^\mu\varepsilon_\lambda{}^{\nu*}}{q^2+i\varepsilon} \longrightarrow \frac{\sum u\bar{u}}{p^2-m^2+i\varepsilon}=\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}\equiv\frac{1}{\not{p}-m+i\varepsilon} \tag{4.102}$$

最後の表式は簡明に表したいときによく使われるが，もちろん本当の意味は第2式で定義される．

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)S_F(x_1, x_2)=\delta^4(x_1-x_2) \tag{4.103}$$

が成立することは容易に証明できるから，これもまたディラック方程式のグリーン関数となっている．

演習 4.7　$\theta(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-i\varepsilon}d\omega$　　を示せ．

参考文献

1)　詳細は，例えば次のような場の量子論の参考書を参照．
西島和彦：場の理論（紀伊國屋数学書叢書）(1987)
C. Izykson and J-B. Zuber : Quantum Field Theory, McGraw-Hill (1980)

5
QED*[1]；量子電磁力学

5.1 S 行 列

5.1.1 相互作用表示

素粒子の構造を知るための手がかりは，ほとんどの場合，粒子同士の散乱や反応で生成された不安定粒子の崩壊での振る舞いを調べることによって得られる．非相対論的量子力学での遷移確率は，摂動論を使えば

$$w_{fi}=2\pi|T_{fi}|^2\rho \tag{5.1}$$

$$T_{fi}=H_{fi}+\sum_{n\neq i}\frac{H_{fn}H_{ni}}{E_i-E_n}+\cdots\cdots \tag{5.2}$$

によって得られる．ここに H_{fi} は相互作用ハミルトニアンの行列要素，ρ は終状態での状態密度であって，散乱中心による 1 体問題の場合は，

$$\rho=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E}=\delta(E_i-E_f)\frac{V\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \tag{5.3}$$

で与えられる．V は規格化のための体積である．この章の目的は，(5.1)～(5.3) に対応する相対論的公式を導き，前章の電磁相互作用ハミルトニアンを使って，荷電粒子の散乱過程の断面積を計算することである．取り上げる例は，実際によく使用されるかあるいは後の議論の下敷きとなる過程として，荷電粒子同士の散乱 ($\mathrm{e}\mu\to\mathrm{e}\mu$) とコンプトン散乱 ($\gamma\mathrm{e}\to\gamma\mathrm{e}$) とする．前章では場を量子化することによって，多粒子系を取り扱うための道具立てを揃えた．ハミルトニアンなどは場の演算子で書かれており，これは時間による量である．一方，粒子状態はフォックベクトルで表現するが，これらは時間によらな

*1) quantum electro-dynamics

い量である．したがって，量子化された場はハイゼンベルグ表示で書かれていることになる．ハイゼンベルグ表示では，演算子 O_{H} が，

$$\frac{\mathrm{d}O_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t}=i[H,\,O_{\mathrm{H}}] \tag{5.4}$$

というハイゼンベルグの運動方程式に従う．ϕ, ψ の従うクライン-ゴルドン方程式やディラック方程式はこの形をしている．しかし，このままでは取扱いが複雑なので，摂動展開に便利な相互作用表示に移ることにする．そのためシュレーディンガー方程式から出発しよう．シュレーディンガー表示では，演算子は時間を含まず，すべての時間情報は波動関数（状態ベクトル）にある．ψ はここでは用語としてはディラック場の演算子を指すものとし，波動関数には $|\Phi\rangle$ を使うことにする．以下シュレーディンガー表示での量には S，ハイゼンベルグ表示での量には H の添字を付けることにするが，相互作用表示の量には添字を付けないことにする．シュレーディンガー方程式は，

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi_{\mathrm{S}}\rangle=H_{\mathrm{S}}|\Phi_{\mathrm{S}}\rangle \tag{5.5}$$

と表される．この一般解は

$$|\Phi_{\mathrm{S}}(t)\rangle=\mathrm{e}^{-iH_{\mathrm{S}}t}|\Phi_{\mathrm{S}}(0)\rangle \tag{5.6}$$

であるから，ハイゼンベルグ表示に移るには

$$|\Phi_{\mathrm{H}}\rangle=\mathrm{e}^{iH_{\mathrm{S}}t}|\Phi_{\mathrm{S}}\rangle \tag{5.7 a}$$

$$O_{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{iH_{\mathrm{S}}t}O_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-iH_{\mathrm{S}}t} \tag{5.7 b}$$

と変換すればよく，(5.7 b) から (5.4) はすぐに導ける．相互作用表示の状態ベクトル $|\Phi\rangle$ と演算子 O を得るには，ハミルトニアンを，自由な粒子のハミルトニアン H_0 と相互作用ハミルトニアン H_{I} とに分け，

$$H_{\mathrm{S}}=H_{0\mathrm{S}}+H_{\mathrm{IS}} \tag{5.8 a}$$

$$|\Phi\rangle=\mathrm{e}^{iH_{0\mathrm{S}}t}|\Phi_{\mathrm{S}}\rangle \tag{5.8 b}$$

$$O(t)=\mathrm{e}^{iH_{0\mathrm{S}}t}O_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-iH_{0\mathrm{S}}t} \tag{5.8 c}$$

とする．$|\Phi\rangle$ の満たす運動方程式は，

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi\rangle &= \mathrm{e}^{iH_{0\mathrm{S}}t}\left(-H_{0\mathrm{S}}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)|\Phi_{\mathrm{S}}\rangle \\ &= H_{\mathrm{I}}|\Phi\rangle \end{aligned} \tag{5.9 a}$$

$$H_{\mathrm{I}}=\mathrm{e}^{iH_{0\mathrm{S}}t}H_{\mathrm{IS}}\mathrm{e}^{-iH_{0\mathrm{S}}t} \tag{5.9 b}$$

となる．$H_{\rm I}$ は相互作用表示での相互作用ハミルトニアンである．また

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t}=i[H_{0\rm s}, O]=i[H_0, O] \tag{5.9 c}$$

$$H_0=\mathrm{e}^{iH_{0\rm s}t}H_{0\rm s}\mathrm{e}^{-iH_{0\rm s}t}=H_{0\rm s} \tag{5.9 d}$$

であるので，相互作用表示では演算子の時間依存性は自由ハミルトニアン H_0 のみにより，相互作用により変わる部分は状態ベクトル $|\Phi\rangle$ の中にある．したがって，$H_{\rm I}=0$ ならば，$|\Phi\rangle$ は時間によらず，相互作用表示はハイゼンベルグ表示に等しい．この表示の便利な点は，相互作用がある場合でも場の演算子が自由場の方程式を満たすことであり，したがって前章で規定した場の展開がそのまま使えることにある．状態ベクトル $|\Phi\rangle$ の満たす方程式はシュレーディンガー方程式に似ているが，$H_{\rm I}$ は時間に依存する自由場の演算子を含んでいる．ここで

$$|\Phi(t)\rangle=U(t, t_0)|\Phi(t_0)\rangle \tag{5.10}$$

により，ユニタリー演算子 U を定義する．相互作用の働く領域が有限であれば，散乱過程の $t\to\infty, -\infty$ では相互作用が働かないから，$|\Phi(t)\rangle$ は，自由ハミルトニアンの固有状態で展開できる．これを保証するには，$H_{\rm I}(t)\to H_{\rm I}^{\varepsilon}\equiv H_{\rm I}(t)\mathrm{e}^{-\varepsilon|t|}$ として計算の最後で $\varepsilon\to 0$ とすればよい（断熱近似）．散乱問題では，$t\to-\infty$ で $|i\rangle$ であった状態が，$t\to\infty$ で $|f\rangle$ になる過程を取り扱うが，このとき単位時間あたりの平均遷移確率は，

$$W_{fi}=\lim_{\substack{t\to\infty\\ t_0\to-\infty}}\frac{|\langle\Phi(t)|U(t, t_0)|\Phi(t_0)\rangle-\delta_{fi}|^2}{t-t_0} \tag{5.11}$$

であるので*2)，われわれの欲しい量は

$$S\equiv U(\infty, -\infty) \tag{5.12}$$

である．これを散乱行列（または，S 行列;scattering matrix）という．(5.10) を (5.9 a) に入れると U の従う方程式が得られる．

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0)=H_{\rm I}(t)U(t, t_0) \tag{5.13 a}$$

*2) 素粒子反応の起きる時間は，典型的な例をとり，陽子直径（$\sim 3\times10^{13}$ cm）程度の距離を，他の粒子が光速度で横切る時間とすると，約 10^{-24} 秒程度であるから，われわれの問題にする時間，例えば 1 秒は無限大となる．

明らかに

$$U(t_0, t_0)=1 \tag{5.13 b}$$

であるので，(5.13 a) に (5.13 b) を組み合わせると

$$U(t, t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\ H_\mathrm{I}(t)U(t, t_0) \tag{5.13 c}$$

と積分方程式の形に書けるので，逐次展開をすると

$$U(t, t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\ H_\mathrm{I}(t)+(-i)^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_\mathrm{I}(t_1)H_\mathrm{I}(t_2)+\cdots \tag{5.14}$$

$$\therefore\quad S=1-i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\ H_\mathrm{I}(t)+(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_\mathrm{I}(t_1)H_\mathrm{I}(t_2)+\cdots \tag{5.15 a}$$

第 3 項で，$t_1 \leftrightarrow t_2$ 変数変換を行い，次に積分順序を変えると，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_\mathrm{I}(t_1)H_\mathrm{I}(t_2)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{\infty}\mathrm{d}t_2 H_\mathrm{I}(t_2)H_\mathrm{I}(t_1)\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\left[\int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_\mathrm{I}(t_1)H_\mathrm{I}(t_2)+\int_{t_1}^{\infty}\mathrm{d}t_2 H_\mathrm{I}(t_2)H_\mathrm{I}(t_1)\right]\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_2\, T[H_\mathrm{I}(t_1)H_\mathrm{I}(t_2)]\right]\end{aligned} \tag{5.15 b}$$

H_I は，ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}_\mathrm{I}$ を使えば

$$H_\mathrm{I}(t)=\int\mathrm{d}^3x\mathcal{H}_\mathrm{I}(t)\equiv\int\mathrm{d}^3x\mathcal{H}_\mathrm{I}(x)$$

とも書ける．以下特に断らない限り積分は全領域にわたるものとすると，T 積を使えば S 行列は

$$\begin{aligned}S=&1-i\int\mathrm{d}^4x\mathcal{H}_\mathrm{I}(x)+\frac{(-i)^2}{2!}\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\, T[\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_1)\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_2)]+\cdots\cdots\\&+\frac{(-i)^n}{n!}\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\cdots\int\mathrm{d}^4x_n\, T[\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_1)\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_2)\cdots\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_n)]\cdots\cdots\\\equiv&\ T\exp\left[-i\int\mathrm{d}^4x\mathcal{H}_\mathrm{I}(x)\right]\end{aligned} \tag{5.16}$$

と書ける．(5.16) を眺めればわかるように，積分が時間と空間で対称であり，また相互作用ラグランジアン $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ が時間微分を含まなければ $\mathcal{H}_\mathrm{I}=-\mathcal{L}_\mathrm{I}$ であるので，(5.16) は相対論的に共変な式である．T 積による効果が多少明瞭ではないが，後の計算具体例でわかるように共変性を壊さない．

次に，散乱行列要素 T_{fi} および $\mathcal{M}_{fi}$ を次式で定義する．

$$\langle f|S|i\rangle\equiv\delta_{fi}-i\langle f|T|i\rangle=\delta_{fi}-i(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)\langle f|\mathcal{M}|i\rangle \tag{5.17}$$

(5.16) では形式的に完全解を求めたが，本書で取り扱う範囲では 2 次までの計算で十分である．非相対論では時間変数は別に取り出し，

$$\langle f|H_{\rm I}(t)|i\rangle=\langle f|{\rm e}^{iH_0t}H_{\rm IS}{\rm e}^{-iH_0t}|i\rangle=\langle f|H_{\rm IS}|i\rangle{\rm e}^{-i(E_i-E_f)t}$$

と書くと，(5.17) の代わりに

$$\langle f|S|i\rangle=\delta_{fi}-(2\pi)i\delta(E_i-E_f)T_{fi} \tag{5.18 a}$$

$$T_{fi}=\langle f|H_{\rm IS}|i\rangle+\sum\frac{\langle f|H_{\rm IS}|n\rangle\langle n|H_{\rm IS}|i\rangle}{E_i-E_n+i\varepsilon}+\cdots \tag{5.18 b}$$

となって，(5.2) を再現する．ε は断熱近似をしたとき導入される項で，$E_i=E_n$ となる特異点の処方を示している．なお (5.17) と (5.18) の T_{fi} は $2\pi\delta(E_i-E_f)$ だけ違うことに注意．

演習 5.1 $H_{\rm I}(t)\to H_{\rm I}^{\varepsilon}(t)$ とすれば (5.15) から (5.18 b) を導けることを示せ．

5.1.2 ラザフォード散乱

相対論的散乱振幅の計算にとりかかる前に，非相対論的量子力学でラザフォード散乱公式を再現してみよう．これはクーロン力による散乱中心によって，スピン 0 の荷電粒子が散乱されるときの式である．(5.1)，(5.2) における H_{fi} は，

$$H_{fi}=\int\psi^{\dagger}{}_f(x)H_{\rm IS}\psi_i(x){\rm d}^3x \tag{5.19 a}$$

$$H_{\rm IS}=\frac{1}{4\pi}\frac{Ze^2}{r} \tag{5.19 b}$$

入射粒子の 3 次元的運動量を $\boldsymbol{p}_{\rm i}$，散乱粒子の運動量を $\boldsymbol{p}_{\rm f}$ とすれば，

$$\psi_{\rm i}=N{\rm e}^{i\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{x}},\qquad \psi_{\rm f}=N{\rm e}^{i\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5.19 c}$$

N は規格因子で，体積 V 中に粒子が 1 個あるようにとれば，$N=1/\sqrt{V}$ である．(5.19 b)，(5.19 c) を (5.19 a) に入れると

$$H_{fi}=\frac{Ze^2}{4\pi V}\int{\rm d}^3x\frac{{\rm e}^{i(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f)\cdot\boldsymbol{x}}}{r} \tag{5.20 a}$$

ここで，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f$ とおき，積分を実行する．

$$I\equiv\int\frac{{\rm e}^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}}{r}d^3x=2\pi\int_0^\infty\int_{-1}^1\frac{{\rm e}^{iqrz}}{r}r^2{\rm d}r{\rm d}z=\frac{2\pi}{iq}\int_0^\infty(e^{iqr}-{\rm e}^{-iqr})dr$$

ただし，$z=\cos\theta$ という変数を使った．このままでは発散するが，クーロン力

には常に遮蔽効果で，$e^{-\mu r}$ の項が掛かっていると考えてよいから，

$$I=\frac{2\pi}{iq}\int_0^{\infty}(e^{-\mu r+iqr}-e^{-\mu r-iqr})dr=\frac{2\pi}{iq}\left(\frac{1}{\mu-iq}-\frac{1}{\mu+iq}\right)$$
$$=\frac{4\pi}{q^2+\mu^2}\to\frac{4\pi}{q^2} \tag{5.21}$$

(5.21) を (5.20 a) に入れて，

$$H_{fi}=\left(\frac{Ze^2}{4\pi V}\right)\frac{4\pi}{q^2} \tag{5.20 b}$$

$$q^2=(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f)^2=4p^2\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{5.22}$$

ただし，θ は $\boldsymbol{p}_i$ と $\boldsymbol{p}_f$ とのなす角である．エネルギー保存則により，$|\boldsymbol{p}_i|=|\boldsymbol{p}_f|=p$ である．終状態密度 ρ_f は，

$$\rho_f=\delta(E_i-E_f)\frac{V\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}=V\left[\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\right]^{-1}\frac{p^2\mathrm{d}\Omega}{8\pi^3}=\frac{Vmp\mathrm{d}\Omega}{8\pi^3} \tag{5.23}$$

$E=p^2/2m$ としエネルギーについては積分した．(5.20)，(5.23) を，(5.1) に入れて，

$$w_{fi}=2\pi\frac{1}{V^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2\left(\frac{4\pi}{q^2}\right)^2\frac{Vmp\mathrm{d}\Omega}{8\pi^3}=\frac{p}{V}\left[\frac{Ze^2}{4\pi}\right]^2\frac{4m}{q^4}\mathrm{d}\Omega \tag{5.24}$$

断面積に直すには，単位入射フラックスあたりの遷移確率を求めればよい．フラックスとは単位面積を毎秒通り過ぎる粒子数のことをいう．波動関数が体積 V の中に粒子1個あるように規格化されているときは，入射フラックスは，入射粒子の速度 $v=p/m$ として，v/V で与えられるから，

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2\frac{4m^2}{q^4}=\frac{Z^2\alpha^2m^2}{4p^4\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{5.25}$$

$$\alpha=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\simeq\frac{1}{137}\quad：\text{微細構造定数} \tag{5.26}$$

規格化体積 V は相殺して消える．これがよく知られたラザフォード散乱公式であり，(5.25) はラザフォードが古典的に導いた式と一致する．

5.2 相対論的運動学

5.2.1 重心系と実験室系

素粒子反応を扱う場合は，2体系の静止座標系，すなわち全運動量がゼロの系（重心系）に移ると便利なことが多い．衝突型加速器が発展する以前は，固定標的bに入射粒子aを衝突させるというタイプの実験が多かった．現在でもほとんどすべての原子核実験や，一部の素粒子実験はこのやり方であり，通常はこれを実験室系と称する．粒子1（入射粒子），粒子2（標的粒子），粒子3（散乱粒子），粒子4（反跳粒子）の4次元的エネルギー運動量を p_1, p_2, p_3, p_4 とし，重心系での力学変数は * をつけて表すことにする．実験室系では，

$$p_1=(E_1;\boldsymbol{p}_1),\qquad p_2=(m_2;\boldsymbol{0})$$
$$p_3=(E_3;\boldsymbol{p}_3),\qquad p_4=(E_4;\boldsymbol{p}_4)\tag{5.27}$$

重心系では，

$$p_1{}^*=(E_1{}^*;\boldsymbol{p}^*),\qquad p_2{}^*=(E_2{}^*;-\boldsymbol{p}^*)$$
$$p_3{}^*=(E_3{}^*;\boldsymbol{p}'^*),\qquad p_4{}^*=(E_4{}^*;-\boldsymbol{p}'^*)\tag{5.28}$$

となる．この実験室系と重心系との対応をつけておこう．

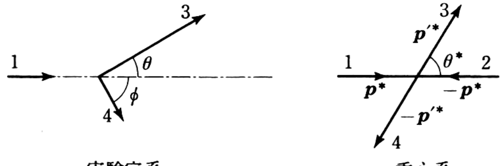


図 5.1 2体反応の実験室系と重心系での運動学

エネルギー運動量の保存則によって，

$$p_1+p_2=p_3+p_4\tag{5.29}$$

この2体系をまとめて，散乱前は実験室系での全エネルギー運動量が $(E_1+E_2;\boldsymbol{p}_1)$ の1体系と見なすことができる．そうすると，重心系では全運動量が0となるから，重心系でのエネルギー $E_1{}^*+E_2{}^*$ は，この2体系の静止質量と見なせる．この静止質量を W と書こう．この2体系の実験室系に対する速度 β とローレンツ因子 γ は，1体で成立する $\beta=p/E$, $\gamma=E/m$ という関係を

2体系にそのまま適用して

$$\beta=\frac{p_1}{E_1+m_2},\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}=\frac{E_1+m_2}{W} \tag{5.30 a}$$

(5.30 a) から，W が計算できて，

$$W=(m_1{}^2+2E_1m_2+m_2{}^2)^{1/2} \tag{5.30 b}$$

と解ける．これで，実験室系と重心系を結び付けるローレンツパラメターがわかったから，一般のローレンツ変換式 (2.40) を使うと，任意のエネルギー運動量に対し，実験室系と重心系での間に次の関係式が成立する．

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{LAB}}&=\gamma(E^*+\beta p^*{}_{/\!/})\\ p_{/\!/\mathrm{LAB}}&=\gamma(p^*{}_{/\!/}+\beta E^*)\\ p_{\perp\mathrm{LAB}}&=p^*{}_{\perp} \end{aligned} \tag{5.31}$$

ただし $p_{/\!/}$ と $p_{\perp}$ は，運動量の z 軸（重心系が動いている方向）に平行な成分と垂直な成分を表す．

$$\begin{aligned} p_{/\!/\mathrm{LAB}}&=p_{\mathrm{LAB}}\cos\theta,\qquad p^*{}_{/\!/}=p^*\cos\theta^*\\ p_{\perp\mathrm{LAB}}&=p_{\mathrm{LAB}}\sin\theta,\qquad p^*{}_{\perp}=p^*\sin\theta^* \end{aligned} \tag{5.32}$$

ここで留意すべき重要なことは，横方向の運動量 $p_{\perp}$ はローレンツ変換の影響を受けないということである．この事実は，後の高エネルギー素粒子現象の取扱いにおいて，b クォークなど重い粒子の同定などデータ解析の際頻繁に使われる．

演習 5.2 重心系で等方的な分布をする粒子 ($\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega^*=\mathrm{const.}$) は，実験室系では等エネルギー分布 ($\mathrm{d}N/\mathrm{d}E=\mathrm{const.}$) をすることを示せ．

(5.31) はローレンツ変換の基本式であるが，実際の計算にはマンデルシュタム変数と呼ばれる次のようなローレンツ不変量を使うと便利なことが多い

$$\begin{aligned} s&\equiv(p_1+p_2)^2=(E_1+E_2)^2-(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)^2\\ t&\equiv(p_1-p_3)^2=(E_1-E_3)^2-(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)^2\\ u&\equiv(p_1-p_4)^2=(E_1-E_4)^2-(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_4)^2 \end{aligned} \tag{5.33}$$

s はローレンツスカラーであるから，どちらの系で評価してもその値は変わらない．s を重心系と実験室系で評価すると，

$$s=\begin{cases}(E^*{}_1+E^*{}_2)^2 & \text{(重心系)} \quad (5.34\text{ a})\\ (E_1+m_2)^2-\boldsymbol{p}^2{}_1=m^2{}_1+2E_1m_2+m^2{}_2 & \text{(実験室系)} \quad (5.34\text{ b})\end{cases}$$

であるから，W^2 に一致する．すなわち，s は 2 体系の不変質量（の自乗）と見なせる量であることがわかる．重心系での運動変数を不変量で表すには

$$\sqrt{s}=W=E^*{}_1+E^*{}_2=\sqrt{\boldsymbol{p}^{*2}+m^2{}_1}+\sqrt{\boldsymbol{p}^{*2}+m^2{}_2}$$

を解いて，

$$E^*{}_1=\frac{s+m^2{}_1-m^2{}_2}{2\sqrt{s}},\qquad E^*{}_2=\frac{s-m^2{}_1+m^2{}_2}{2\sqrt{s}} \tag{5.35}$$

$$p^*=\sqrt{E^{*2}{}_1-m^2{}_1}=\frac{\lambda(s,\, m^2{}_1,\, m^2{}_2)}{2\sqrt{s}}=\frac{\sqrt{s}\,\lambda(1,\, x_1,\, x_2)}{2} \tag{5.36 a}$$

$$\lambda(x,\, y,\, z)\equiv(x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx)^{1/2},\qquad x_1=m_1{}^2/s,\ x_2=m_2{}^2/s \tag{5.36 b}$$

同様に t についても書き下ろしてみると，

$$t=(E_1-E_3)^2-(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)^2=m_1{}^2+m_3{}^2-2(E_1E_3-p_1p_3\cos\theta) \tag{5.37 a}$$

ここに θ は散乱角であり $\cos\theta=(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_3)/|\boldsymbol{p}_1|\,|\boldsymbol{p}_3|$ で定義される．実際問題としては，$E\gg m$, $E\sim p$ であることが多いので

$$t\sim-2p_1p_3(1-\cos\theta)\sim-4E_1E_3\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{5.37 b}$$

t は，実験室系でも重心系でも同じ形をしている．u は t と同じような変数で，単に粒子 3 を粒子 4 に置き換えたものである．重心系では，粒子 4 は粒子 3 と逆方向に飛ぶから，同じ近似で，

$$t=-2p^*{}_1p^*{}_3(1-\cos\theta^*) \tag{5.37 c}$$

$$u=-2p^*{}_1p^*{}_3(1+\cos\theta^*) \tag{5.37 d}$$

と書ける．これらの式から s が全エネルギー，t, u が散乱角の目安を与える量であることがわかる．変数の範囲は，$m_i=0$ の近似で，$s\geqq0, t\leqq0, u\leqq0$ となる．

演習 5.3 s, t, u は独立ではなく $s+t+u=\sum_{i=1}^{4}m_i{}^2$ であることを示せ．

5.2.2 交 叉 対 称

一見すると，s と t, u とは物理的意味が大きく異なるように見えるが，反粒子は，形式的（数学的）には負のエネルギー運動量をもつ粒子の時間に逆行する状態として扱えることを考慮すると，基本的には同等であることが次のよ

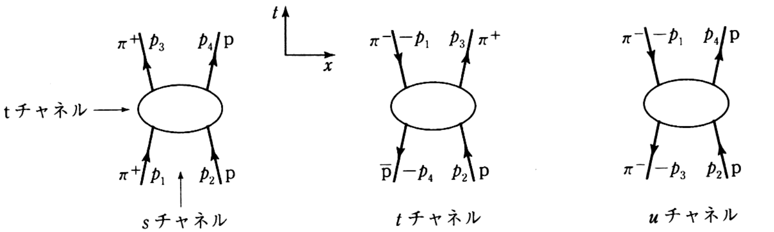
うにしていえる．例として図5.2 (a) の

$$\pi^+(p_1)+\mathrm{p}(p_2) \longrightarrow \pi^+(p_3)+\mathrm{p}(p_4) \qquad (5.38\,\mathrm{a})$$

という弾性散乱を考えてみよう．

$$p_1 \longrightarrow -p_1, \qquad p_4 \longrightarrow -p_4$$

の置き換えを行うと (crossing, 交叉させるという), その物理的意味は次の



(a) $\pi^+ + \mathrm{p} \to \pi^+ + \mathrm{p}$ (b) $\bar{\mathrm{p}} + \mathrm{p} \to \pi^- + \pi^+$ (c) $\pi^- + \mathrm{p} \to \pi^- + \mathrm{p}$

図5.2 交叉 (crossing) と s, t, u チャネル反応の相互関係

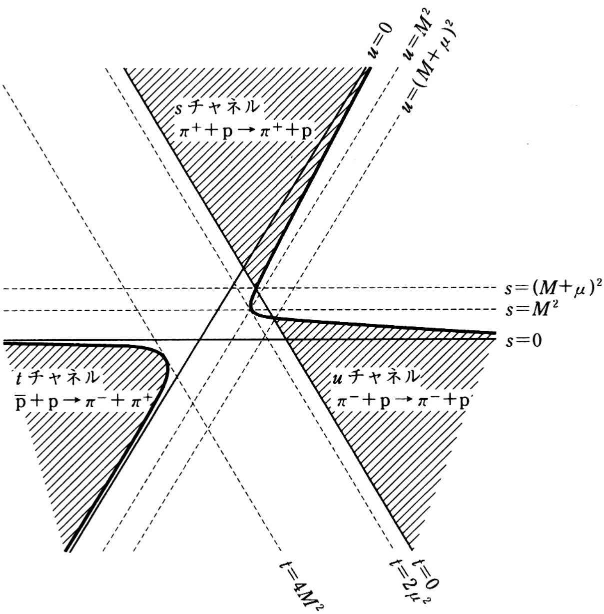


図5.3 s, t, u 各チャネルの変数領域

(a) s チャネル $\pi^+\mathrm{p} \longrightarrow \pi^+\mathrm{p}$, $s \geqq (M+\mu)^2$, $t \leqq 0$, $u \leqq (M-\mu)^2$

(b) t チャネル $\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p} \longrightarrow \pi^-\pi^+$, $t \geqq 4M^2$, $u \leqq 0$, $s \leqq 0$

(c) u チャネル $\pi^-\mathrm{p} \longrightarrow \pi^-\mathrm{p}$, $u \geqq (M+\mu)^2$, $t \leqq 0$, $s \leqq (M-\mu)^2$

ようになる (図 5.2 b).

$$\bar{\mathrm{p}}(p_4)+\mathrm{p}(p_2) \longrightarrow \pi^-(p_1)+\pi^+(p_3) \tag{5.38 b}$$

このとき質量をゼロと置く近似で

$$\begin{aligned}
s&=(p_1+p_2)^2=(-p_4-p_3)^2 \longrightarrow u_t\equiv(p_4-p_3)^2\sim-2p_t^2(1+\cos\theta_t)\\
t&=(p_1-p_3)^2=(-p_4+p_2)^2 \longrightarrow s_t\equiv(p_4+p_2)^2\sim\ \ 4p_t^2\\
u&=(p_1-p_4)^2 \qquad\qquad\qquad\ \ \longrightarrow t_t\equiv(p_4-p_1)^2\sim-2p_t^2(1-\cos\theta_t)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

p_t は，$\bar{p}p$ の重心系での運動量を表し，θ_t はでていく π^- が，入射の $\bar{p}$ となす角である．ここでは $t\geqq 0$, $s\leqq 0$, $u\leqq 0$ で，反応 (5.38 b) では，$t\equiv s_t$, $u\equiv t_t$, $s\equiv u_t$ が，反応 (5.38 a) での s, t, u に対応する変数となる．(5.38 a, b) の反応をそれぞれ s チャネル，t チャネルの反応という．s チャネルの反応と t チャネルの反応では，s, t, u の役割が入れ替わっていることがわかる．同様に u チャネルの反応 (図 5.2 (c)) も定義できる．このように，s, t, u はともに正にも負にもなりうる量であり，物理的にはそれぞれの値に応じて，三つの交叉チャネルを同時に記述する．このことは，反応の遷移振幅が s, t, u で記述されていれば，直ちに交叉チャネルの遷移振幅も得られるという重要な事実を意味する．図 5.3 に s, t, u の斜交座標で，π の質量 μ，陽子質量 M が有限の場合について，三つの物理的領域を示す．

5.3 相対論的断面積

具体的な反応例にとりかかる前に，(5.1) の公式が，相対論的にはどう表されるかを示しておこう．単位時間あたりの平均遷移確率は，(5.11) で与えられるので，(5.17) を参照すると，

$$\begin{aligned}
|S_{fi}-\delta_{fi}|^2&=|(2\pi)^4 i\delta^4(p_i-p_f)\mathcal{M}_{fi}|^2\\
&=(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)\left[\int e^{i(p_i-p_f)x}\mathrm{d}^4x\right]|\mathcal{M}_{fi}|^2\\
&=(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)\left[\int \mathrm{d}^4x\right]|\mathcal{M}_{fi}|^2\\
&=(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)\,VT|\mathcal{M}_{fi}|^2
\end{aligned} \tag{5.40}$$

ここで，δ 関数を積分形で置き換え，積分の全空間 VT は，物理的には十分

大きいが有限であることを使った．単位時間単位体積あたりの遷移確率 W_{fi} は，VT で割り終状態密度 ρ_f を掛けて，

$$W_{fi}=(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)|\langle f|\mathcal{M}|i\rangle|^2\cdot\rho_f \tag{5.41}$$

断面積 $\mathrm{d}\sigma$ は，さらにこれを入射粒子のフラックスと，標的粒子数の密度で割って得られる．

a．状態密度

本書では，相対論的に扱うときはエネルギー運動量 p の粒子が体積 V 中に $2E$ 個あるようにする規格化条件を採用している．粒子の波動関数として平面波解，クライン-ゴルドン方程式に従う粒子は $\phi=N\exp(-ipx)$，ディラック粒子は $\psi=Nu_r(p)\exp(-ipx)$ と書けば，$u^\dagger u=2E$ (3.29) であるので，規格条件は，それぞれ

$$\int\rho\mathrm{d}V=\int\mathrm{d}V\, i\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial x_0}-\frac{\partial\phi^*}{\partial x_0}\phi\right]=2EN^2V \quad (\text{ボソン}) \tag{5.42 a}$$

$$=\int\mathrm{d}V\,\psi^\dagger\psi \qquad =2EN^2V \quad (\text{フェルミオン}) \tag{5.42 b}$$

となり，いずれの場合も $N=1/\sqrt{V}$ を与える．1辺の長さ L 体積 $V=L^3$ の箱に閉じ込めて，周期的境界条件 $\psi(x+L)=\psi(x)$ を付けると波動関数の波数 k は，離散固有値 $(2\pi n/L)^3=(2\pi)^3n_xn_yn_z/V$，$\{n_x, n_y, n_z=0, 1, 2, \cdots\}$ のみ許されるので，位相空間 d^3p の中にある状態数 $\mathrm{d}\rho_f$ は，

$$\mathrm{d}\rho_f=\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p}{2E} \tag{5.42 c}$$

入射粒子を1，標的粒子を2，反応後生成された粒子を 3, 4, …と名前をつけると，入射粒子のフラックスは，標的粒子に対する相対速度を v_{12} として，$2E_1v_{12}/V$，標的粒子の密度は，$2E_2/V$ であるので，

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{V^2|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2E_12E_2v_{12}}(2\pi)^4\delta^4\left(p_1+p_2-\sum_f p_f\right)\prod_f\left(\frac{V\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^32E_f}\right) \tag{5.43 a}$$

ローレンツ不変な入射フラックス因子 F を，

$$F\equiv4E_1E_2v_{12}=4E_1E_2\left[\frac{p_1}{E_1}-\frac{p_2}{E_2}\right]=\begin{cases}4p^*W & (\text{重心系})\\ 4p_1m_2 & (\text{実験室系})\end{cases}$$

$$=4[(p_1\cdot p_2)^2-m_1{}^2m_2{}^2]^{1/2}=2\lambda(s, m_1{}^2, m_2{}^2)=2s\lambda(1, x_1, x_2)$$

$$\lambda(x, y, z)\equiv(x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx)^{1/2}$$

$$x_1 = m_1^2/s, \qquad x_2 = m_2^2/s \tag{5.43 b}$$

で定義する．波動関数が，$\sim \mathrm{e}^{-ipx}/\sqrt{V}$ の形をしていること考慮すると，ローレンツ不変な行列要素 $\mathcal{M}_{fi}$ から，(終状態の粒子数+2) 個の規格因子 $1/\sqrt{V}$ がでてくるので，体積 V は $\mathrm{d}\sigma$ の表式からは当然のことながら消える．最終的には常に表に現れないようになっているので，以下 $V=1$ とおく．

b．位相空間体積

ここでローレンツ不変な位相空間 (LIPS ; Lorentz invariant phase space) の体積 d LIPS を

$$\mathrm{d\,LIPS} \equiv (2\pi)^4 \delta^4\left(p_i - \sum p_f\right) \frac{1}{m!} \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \tag{5.44}$$

で導入する．ここに $m!$ は，同一粒子があるときの補正因子である．(5.43 b), (5.44) を (5.43 a) に入れると，断面積は，

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2s\lambda(1, x_1, x_2)} \mathrm{d\,LIPS} \tag{5.45 a}$$

となる．

不安定粒子の崩壊率 $\mathrm{d}\Gamma(2 \to 3+4+\cdots)$ は，遷移確率を粒子 2 の静止系でのフラックスで割って，

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2m_2} \mathrm{d\,LIPS} \tag{5.45 b}$$

で与えられる．

演習5.4 終状態が2体の場合であるとき，重心系での微分断面積は (付録 (C.12)),

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{p_f}{p_i}\right) \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{5.46 a}$$

演習 5.5* 2 体の弾性散乱で，$m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = m_4 = M$ のとき，実験室系での微分断面積は (付録 (C.18))

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^2 \frac{1}{64\pi^2 M^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{5.46 b}$$

であることを示せ．

5.4 モット散乱

高エネルギーの電子がスピン 0 の原子核のクーロン力によって散乱される場

合は，相対論的効果とスピン効果をとり入れる必要がある．この場合使用すべき相互作用ハミルトニアン密度は，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{I}}=-ej^{\mu}A_{\mu}, \qquad j^{\mu}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{5.47}$$

$\psi, \bar{\psi}$ は前章で与えられた量子化ディラック場である．原子核の反跳を無視する限り電子が原子核に与える影響はない．このように反応によって電磁場の供給源が乱されないときは外場（古典的な意味での c 数ポテンシャル）として扱ってよく，$A^{\mu}=(Ze/4\pi r\,;0,0,0)$（クーロン場）とか $(0;-yB\sin\omega t,\ xB\sin\omega t, 0)$（$z$ 軸方向の振動磁場）のような形で与えられる．散乱の行列要素は，スピン状態を r, s で示せば，

$$T_{fi}=\int\mathrm{d}^4x\langle f|\mathcal{H}_{\mathrm{I}}|i\rangle=-\int\mathrm{d}^4x\langle p_f, s|ej^{\mu}(x)|p_i, r\rangle A_{\mu}(x) \tag{5.48 a}$$

$$A_{\mu}(x)=(Ze/4\pi r\,;0,0,0) \tag{5.48 b}$$

となる．

$$\begin{aligned} e\langle p_f, s|j^{\mu}(x)|p_i, r\rangle &= e\langle p_f, s|\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)|p_i, r\rangle \\ &= e\bar{u}_s(p_f)\gamma^{\mu}u_r(p_i)\mathrm{e}^{-i(p_i-p_f)\cdot x} \end{aligned} \tag{5.49}$$

を入れると，(5.48 a) は，

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -2\pi i\delta(E_i-E_f)\frac{Ze^2}{4\pi}\bar{u}_s(p_f)\gamma^0u_r(p_i)\int\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f)\cdot\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= -2\pi i\delta(E_i-E_f)\frac{Ze^2}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{q^2}\right)\bar{u}_s(p_f)\gamma^0u_r(p_i) \end{aligned} \tag{5.50}$$

となる．これから，

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2E_iv}\left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2\left(\frac{4\pi}{q^2}\right)^2|\bar{u}_s(p_f)\gamma^0u_r(p_i)|^2\times2\pi\delta(E_i-E_f)\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^32E_f} \tag{5.51}$$

この式には，ラザフォード散乱と同じく $\delta^3(p_i-p_f)$ がない．つまり運動量が保存しない．これは原子核が反跳しないという外場近似をしたことに由来する．

断面積を計算するには，$|\bar{u}_s(p_f)\gamma^{\mu}u_r(p_i)|^2$ を計算する必要がある．上記のように特定の成分 $\mu=0$ しか効かないときは，$u(p)$ の具体的表示 (3.23) を用いる方が計算が早い場合もあるが，後のために一般式で計算しておく．通常の実験条件では，入射粒子は偏極してなく，終状態の偏極も観測しない場合が多いので，始状態偏極に関しては平均をとり（偏極状態について和をとり，偏極の

自由度で割る)，終状態偏極については和をとる．これを $L^{\mu\nu}$ と書くと

$$L^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\sum_{r,s}\bar{u}_s(p_f)\gamma^\mu u_r(p_i)(\bar{u}_s(p_f)\gamma^\nu u_r(p_i))^* \tag{5.52}$$

$$(\bar{u}_s(p_f)\Gamma u_r(p_i))^*=\bar{u}_r(p_i)\bar{\Gamma}u_s(p_f) \tag{5.53 a}$$

$$\bar{\Gamma}=\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{5.53 b}$$

であり，$\Gamma=\gamma^\mu$ のとき，$\bar{\Gamma}=\gamma^\mu$ を使うと，$L^{\mu\nu}$ は，

$$L^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_{r,s}(\bar{u}_s(p_f)\gamma^\mu u_r(p_i))(\bar{u}_r(p_i)\gamma^\nu u_s(p_f)) \tag{5.54 a}$$

ここで，ディラック平面波解の性質 (3.47)

$$\sum_r u_r(p)\bar{u}_r(p)=\not{p}+m, \qquad \sum_r v_r(p)\bar{v}_r(p)=\not{p}-m \tag{5.55}$$

を使えば，

$$L^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_i+m)\gamma^\nu(\not{p}_f+m)] \tag{5.54 b}$$

となり，さらに γ 行列の性質 (付録 (A.10))

$$\mathrm{Tr}[\gamma^{i_1}\gamma^{i_2}\cdots\gamma^{i_{2n+1}}]=0 \tag{5.56 a}$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu]=4g^{\mu\nu} \tag{5.56 b}$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma]=4[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}] \tag{5.56 c}$$

を使うと

$$\begin{aligned}L^{\mu\nu}&=2\,[\{p^\mu{}_i p^\nu{}_f+p^\nu{}_i p^\mu{}_f-(p_i\cdot p_f)g^{\mu\nu}\}+m^2\,g^{\mu\nu}]\\&=2\,[p^\mu{}_i p^\nu{}_f+p^\nu{}_i p^\mu{}_f+(q^2/2)g^{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{5.54 c}$$

$$\begin{aligned}q^2&=(p_i-p_f)^2=2m^2-2(p_i\cdot p_f)\\&\simeq-2p_ip_f(1-\cos\theta)\quad(p_i,\,p_f\gg m)\end{aligned} \tag{5.57}$$

演習 5.6 γ 行列の性質 (3.39)～(3.42) を使って，(5.56) を証明せよ．

さて本題に戻ると，モット散乱では $\mu=\nu=0$ の成分しか効かない．δ 関数でエネルギーの保存が保証されているので，$E_i=E_f=E$, $|\boldsymbol{p}_i|=|\boldsymbol{p}_f|=p$, $v=p/E$ を使うと，

$$L^{00}=2\,[2E_fE_i+m^2-E_fE_i+p_fp_i\cos\theta]=4E^2\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{5.58}$$

終状態密度と入射フラックスは

$$\delta(E_i-E_f)\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E}=\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\right)^{-1}\frac{p^2\mathrm{d}\Omega}{16\pi^3E}=\frac{p\,\mathrm{d}\Omega}{16\pi^3} \tag{5.59 a}$$

$$2E_i v = 2p_i = 2p \tag{5.59 b}$$

であるので，(5.58)，(5.59 a)，(5.59 b) を (5.51) に入れると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2}{q^4}E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{5.60}$$

これを**モット散乱公式**という．ラザフォード散乱公式 (5.25) と比べると，相対論効果が，$m \to E$ $(v = p/m \to p/E)$ として現れ，電子のスピン効果が，

$$1 \to \frac{1}{2}\sum|\bar{u}_s(p_f)\gamma^0 u_r(p_i)|^2/4E_1E_2 = 1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

となっていることがわかる．

演習 5.7* $\bar{u}_s(p_f)\gamma^0 u_r(p_i)$ に直接 (3.23) を入れて，スピンを反転しない断面積と反転する断面積が，それぞれ $\{1 + p^2\cos\theta/(E+m)^2\}^2$，$\{(p^2\sin\theta)/(E+m)^2\}^2$ に比例すること，両者の和をとれば (5.60) を再現することを示せ．

演習 5.8* スカラー粒子が入射するとき，その電流を，

$$ej^\mu = ie(\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \partial^\mu\phi^\dagger\phi) \tag{5.61}$$

として，クーロン力による散乱公式を導き，それが，(5.60) の第 1 項と一致することを示せ．

クーロン散乱と磁気散乱　電磁散乱にはクーロン散乱と磁気散乱があるが[*3)]．磁気散乱はハミルトニアンの形からわかるようにスピン反転反応である．ポテンシャルが，静電的なクーロンポテンシャルのみであっても，磁場による散乱が起こるのは，電子の静止系から眺めると，標的が動いているので電流が生じ磁場が発生することによる．演習 5.7 の結果からわかるように電子の速度 $v \ll 1$（光速）のときは，スピン反転断面積したがって磁気散乱の寄与は無視できるが，$v \simeq 1$ のときは電場による散乱と同程度に重要なことがわかる．

偏極の回転法　上記の議論によって電子の偏極状態を変更する一つの方法が思い浮かぶ．原子質量の大きい原子核を，円周上に並べ円周上の一点から遅い ($v \ll 1$) 電子を発射させて円周上の原子核に衝突させ直径の反対側で受ければ，散乱角は 90° であり，スピンは反転しないから，縦偏極の電子を横偏極に変更できる．この方法は β 崩壊の電子の縦偏極を測定するときに使われた

*3)　非相対論での電磁場との相互作用ハミルトニアンを書けば，

$$H_I = -e\phi - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{\mu} = -(e/2m)g\boldsymbol{s}$$

$g = 2$ は電子磁気能率の g 因子，$\boldsymbol{s}$ は電子のスピンである．

(図 5.4).

ヘリシティの回転　高エネルギーでは電子の質量は無視してよい．このとき $v=1$ であり，モット散乱公式は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4\alpha^2}{q^4}E^2\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{5.62}$$

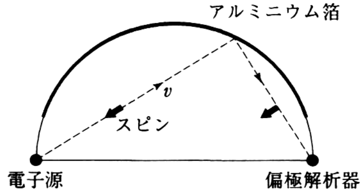


図 5.4　モット散乱を利用して縦偏極を横偏極に変える[1)]

となり，スピンのない場合の式と $\cos^2(\theta/2)$ だけ異なる．この理由は，質量が 0 の粒子は偏極が運動方向のみに許され（ヘリシティの固有状態)，かつ電磁相互作用のようなベクトル型相互作用ではヘリシティが保存されることによる（後述§5.5.2 参照)．ヘリシティが保存されていれば，始状態のスピンの向きは，z 軸（入射方向）に平行であり，散乱後は z 軸と θ をなす方向を向くわけであるから，スピン 1/2 のヘリシティ状態を θ だけ回転する行列要素 ($d^j_{f,i}=\langle j, j_z=\pm 1/2;\theta|\exp(-i\theta J_y)|j, j_z=\pm 1/2;0\rangle$) の自乗が余分にかかる．$\cos(\theta/2)$ は，$d^{1/2}_{\pm 1/2,\pm 1/2}$ に等しい（付録 D：ヘリシティ状態の回転).

5.5　eμ 散乱（スピン 1/2 をもつ粒子同士の散乱)

5.5.1　散　乱　振　幅

スピン 1/2 の標的による散乱は，例えば電子-陽子 (e^-p) 散乱があるが，陽子は異常磁気能率をもち，ディラック方程式に従う粒子とはいえない．ディラック方程式に従う粒子としてはミューオンがある．したがって，われわれは以下ミューオンとの散乱を想定するが，この反応は実験的には実現困難である．むしろ後に実用になるのはクォークとの散乱であり，e^-p 非弾性散乱の解析に有用となるものである．また，交叉対称 (crossing) を使えば，$e^-e^+\to\mu^-\mu^+$ や，$e^-e^+\to q\bar{q}$ ($=e^-e^+\to$ hadrons) すなわち e^+e^- 衝突型加速器反応に

も使える公式となる．ミューオンとの散乱のように，標的の反跳が無視できない場合の電磁場は量子場として扱わねばならない．

いま，電子 e とミューオン μ の運動学変数を次のように定義する（図 5.5）．

$$\mathrm{e}(p_1)+\mu(p_2)\longrightarrow \mathrm{e}(p_3)+\mu(p_4) \tag{5.63}$$

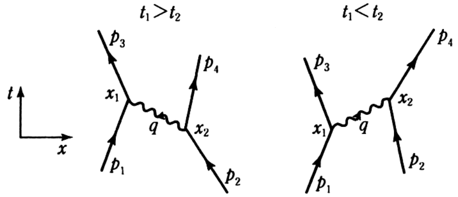


図 5.5　eμ 散乱
(a) $t_1>t_2$ で効く過程，(b) $t_1<t_2$ で効く過程
ファインマンの伝播関数 D_F は両者の効果を含む．

eμ 散乱は，図 5.5 を見ればわかるようにフォトンを交換することにより生じる．ここでは相互作用の 2 次効果が効く．散乱行列要素は，

$$S_{fi}=\frac{(-i)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2\, T[\langle p_3,\, p_4|\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_1)\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_2)|p_1,\, p_2\rangle] \tag{5.64}$$

$p_1\to p_3$ と $p_2\to p_4$ の遷移は異なる時空点で起きることを考慮すると，電子部とミューオン部は分離できる．ここで，二つの $\mathcal{H}_\mathrm{I}$ の間に中間状態

$$1=\sum_n |n\rangle\langle n| \tag{5.65}$$

を入れる．$|n\rangle$ は物理的粒子の実現しうる任意の状態である．図 5.5 に対応する $|n\rangle$ は 1 個のフォトン（エネルギー運動量 q^μ，偏極 λ で指定される）を含む状態であるので，

$$\sum_n \longrightarrow \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2\omega}, \qquad \omega=|\boldsymbol{q}|$$

を入れると，(5.64) の $T[\cdots\cdots]$ は，

$$\sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2\omega}\, T[\langle p_3|\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_1)|p_1,\, q\lambda\rangle\langle p_4,\, q\lambda|\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_2)|p_2\rangle] \tag{5.66}$$

$p_1\leftrightarrow p_2$, $p_3\leftrightarrow p_4$ としたものも存在するが，$x_1\leftrightarrow x_2$ で完全に対称であり，(5.64) で 2! を相殺するのみなので，上式だけを考えれば十分である．行列要素を (4.87 a)，(4.87 b) を参照して具体的に書き下ろせば

$$\langle p_3|\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_1)|p_1,\, q\lambda\rangle=-e\bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu u_r(p_1)\mathrm{e}^{-i(p_1-p_3)x_1}\langle 0|A_\mu(x_1)|q\lambda\rangle$$

$$\langle p_4, q\lambda|\mathcal{H}_\mathrm{I}(x_2)|p_2\rangle = -e\bar{u}_m(p_4)\gamma^\nu u_l(p_2)\mathrm{e}^{-i(p_2-p_4)x_2}\langle q\lambda|A_\nu(x_2)|0\rangle \tag{5.67}$$

であるので

$$\begin{aligned} S_{fi} = (-i)^2\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2\, T[&e\bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu u_r(p_1)\mathrm{e}^{-i(p_1-p_3)x_1} \\ &\times\sum_\lambda\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2\omega}\langle 0|A_\mu(x_1)|q\lambda\rangle\langle q\lambda|A_\nu(x_2)|0\rangle \\ &\times e\bar{u}_m(p_4)\gamma^\nu u_l(p_2)\mathrm{e}^{-i(p_2-p_4)x_2}] \end{aligned} \tag{5.68}$$

(5.68) の真中に現れる項はファインマンの伝播関数 (§4.7) であるから, (4.99) を入れて

$$\begin{aligned} S_{fi} = &\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2\, \bar{u}_s(p_3)(ie\gamma^\mu)u_r(p_1)\mathrm{e}^{-i(p_1-p_3)x_1}\times\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4q\,\mathrm{e}^{-iq(x_1-x_2)}\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}\right) \\ &\times\bar{u}_m(p_4)(ie\gamma^\nu)u_l(p_2)\mathrm{e}^{-i(p_2-p_4)x_2} \end{aligned} \tag{5.69}$$

ここで, x_1, x_2, q についての積分を順に実行すると,

$$\int \mathrm{d}^4x_1 \longrightarrow (2\pi)^4\delta^4(p_1-p_3+q)$$

$$\int \mathrm{d}^4x_2 \longrightarrow (2\pi)^4\delta^4(p_2-p_4-q)$$

であり,

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4q\left[\iint \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\right] \longrightarrow (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \tag{5.70}$$

となるので, 結局

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} - (2\pi)^4 i\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\mathcal{M}_{fi} \\ &= \delta_{fi} - (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \\ &\quad\times\bar{u}_s(p_3)(ie\gamma^\mu)u_r(p_1)\left(\frac{-i}{q^2+i\varepsilon}\right)\bar{u}_m(p_4)(ie\gamma_\mu)u_l(p_2) \end{aligned} \tag{5.71}$$

ただし, $q = p_3 - p_1 = p_2 - p_4$ である.

$$\mathcal{M}_{fi} = e^2\bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu u_r(p_1)\frac{-1}{q^2}\bar{u}_m(p_4)\gamma_\mu u_l(p_2) \tag{5.72}$$

電子のカレントを自乗して, スピンについて平均をとる計算はすでに, (5.52)～(5.56) で行った.

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}(p_1, p_3) &= \frac{1}{2}\sum_{\text{スピン}}[\bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu u_r(p_1)][\bar{u}_s(p_3)\gamma^\nu u_r(p_1)]^* \\ &= 2[p_3{}^\mu p_1{}^\nu + p_3{}^\nu p_1{}^\mu + (q^2/2)g^{\mu\nu}] \end{aligned} \tag{5.73 a}$$

ミューオン部分についても同じ計算が適用できる．

$$L_{\mu\nu}(p_2, p_4) \equiv M_{\mu\nu} = 2[p_{4\mu}p_{2\nu} + p_{4\nu}p_{2\mu} + (q^2/2)g_{\mu\nu}] \qquad (5.73\,\mathrm{b})$$

カレント保存則 $(\partial_\mu j^\mu = 0)$ から，

$$q_\mu L^{\mu\nu} = q_\nu L^{\mu\nu} = 0 \qquad (5.74)$$

が証明できる．

演習 5.9　実際に (5.73) に q_μ を掛けて (5.74) を証明せよ．

$N = L^{\mu\nu}M_{\mu\nu}$ を計算するときは，

$$p_4 = p_4 - p_2 + p_2 = p_2 - q \qquad (5.75)$$

の関係式と，(5.74) を使用すれば，$M_{\mu\nu}$ の中の p_4 を p_2 で置き換えてよいことがわかる．電子の質量 m を無視する近似での結果は

$$N = 4\,[(s - M^2)(M^2 - u) + q^2M^2 + q^4/2] \qquad (5.76)$$

$$\simeq 2\,[s^2 + u^2 - 4M^2(s + u) + 6M^4] \qquad (5.77)$$

(5.76) から (5.77) への変換には，$s + t + u = 2m^2 + 2M^2 \simeq 2M^2$ の式を使った．行列要素 $\mathcal{M}_{fi}$ を自乗しスピンについて始状態の平均と終状態の和をとったものを $|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2$ と書くと

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 = \frac{4e^4}{q^4}[(s - M^2)(M^2 - u) + q^2M^2 + q^4/2] \qquad (5.78)$$

実験室系では，$s - M^2 = 2p_1M$，$M^2 - u = 2p_3M$，$q^2 = t = -2p_1p_3(1 - \cos\theta)$ であるので，(5.78) に入れて，

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{q^4}16M^2p_1p_3\cos^2\frac{\theta}{2}\left[1 - \frac{q^2}{2M^2}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad (5.79)$$

実験室系の断面積は，(5.46 b) で与えられているから

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^2 \frac{1}{64\pi^2M^2}|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 \qquad (5.46\,\mathrm{b})$$

$$\therefore\quad \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}} = \frac{4\alpha^2}{q^4}\frac{p_3{}^3}{p_1}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - \frac{q^2}{2M^2}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= \sigma_{\mathrm{MOTT}}\frac{p_3}{p_1}\left[1 - \frac{q^2}{2M^2}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad (5.80)$$

$$\sigma_{\mathrm{MOTT}} = \frac{4\alpha^2}{q^4}E_3{}^2\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad (5.81)$$

[　] 内の第 1 項が標的の電荷による散乱部分，第 2 項が標的の磁気能率によ

る散乱を表す．

さて重心系での断面積は (5.46 a) で与えられる．

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{CM}}}=\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{5.46 a}$$

$s, u \gg M$ (高エネルギーではよく使う条件) が成立するとすれば，スピン平均をとった断面積は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{CM}}}=\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\frac{1}{64\pi^2 s}\frac{(4\pi\alpha)^2}{q^4}\cdot 2(s^2+u^2)$$
$$=\frac{\alpha^2}{q^4}\frac{(s^2+u^2)}{2s}=\frac{\alpha^2}{q^4}s\,\frac{1+\{(1+\cos\theta)/2\}^2}{2} \tag{5.82}$$

ただし，$p_i=p_f$ を使った．

仮想粒子　しばしば，中間状態のフォトンは 4 元運動量 $q=(q^0; q)$ をもつという言い方をする．このとき $q=p_1-p_3=p_4-p_2$ であるので $q^2\neq 0$ であり，質量殻条件を満たさない仮想粒子である．一方，散乱行列を展開するとき使った中間状態は，自由場の生成演算子でつくられた状態であるから，物理的粒子すなわち質量殻上にある粒子で構成されているはずである．この差はどこからくるのであろうか？

ファインマン伝播関数の展開式 (4.88 b) に現れる中間状態フォトンは質量殻上にある物理的フォトンであり，ここでは $q^0=\omega=|\boldsymbol{q}|$ である．ここで $\theta(t)$ 関数の積分表示

$$\theta(t)=\frac{-1}{2\pi i}\int\frac{\mathrm{d}z}{z+i\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-izt}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\mathrm{d}z}{z-i\varepsilon}\,\mathrm{e}^{+izt} \tag{5.83}$$

を使って書き直すと，(4.88 c) または (4.98) の被積分関数は

$$\{\theta(t_1-t_2)\mathrm{e}^{-iq(x_1-x_2)}+\theta(t_2-t_1)\mathrm{e}^{+iq(x_1-x_2)}\}/(2\omega)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\mathrm{d}z\frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}}{2\omega}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-i(z+\omega)(t_1-t_2)}}{z+i\varepsilon}+\frac{\mathrm{e}^{-i(z-\omega)(t_1-t_2)}}{z-i\varepsilon}\right)$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\mathrm{d}q^0\,\frac{\mathrm{e}^{iq(x_1-x_2)}}{2\omega}\left(\frac{1}{q^0-\omega+i\varepsilon}-\frac{1}{q^0+\omega-i\varepsilon}\right)$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\mathrm{d}q^0\,\frac{\mathrm{e}^{iq\cdot(x_1-x_2)}}{q^2+i\varepsilon} \tag{5.84}$$

となる．ここで第 2 の式に移るとき，運動量を負にしても積分すれば変わらない事実を使った．相互作用の際エネルギー保存の関係式を満たすのはこの

(5.84) の q^0 であって，もともとのフォトンのエネルギー ω とは関係のない単なる積分変数であることがわかる．

次に非相対論的取り扱いとの関連をみるため，時間の順序をあらわに考慮する．(5.84) の第 1, 2 項はそれぞれ図 5.5 (a), (b) に対応するから，中間状態のエネルギーは

$$E_n(\mathrm{a})=E_1+E_4+\omega, \qquad E_n(\mathrm{b})=E_2+E_3+\omega$$

となる．$q^0=E_3-E_1=E_2-E_4$ を入れると，第 1, 2 項の分母はそれぞれ

$$\begin{aligned} q^0-\omega&=(E_2-E_4)-\{E_n(\mathrm{a})-E_1-E_4\}=E_1+E_2-E_n(\mathrm{a})=E_i-E_n(\mathrm{a}) \\ -(q^0+\omega)&=-(E_3-E_1)-\{E_n(\mathrm{b})-E_2-E_3\}=E_1+E_2-E_n(\mathrm{b})=E_i-E_n(\mathrm{b}) \end{aligned} \tag{5.85}$$

となって，散乱行列の非相対論的摂動式 (5.18 b) を再現することがわかる．非相対論的取扱いでは二つ現れる中間状態が，相対論的には時間に逆行する波動という概念を取り入れることによって，両者を一つの伝播関数にまとめることができおおいに簡略化するとともに見通しもまたよくなったわけである．

しばしば，“中間状態への遷移では，非相対論的取扱いでは質量殻上の物理的状態へ遷移するがエネルギーが保存しない．相対論的取扱いでの遷移は，エネルギー運動量が保存するが，中間状態は質量殻上にない”という表現をするが，以上の議論からわかるように後半部分は正確な表現ではなく，便宜上の言い回しであることに注意する必要がある．

5.5.2 偏極している eμ の弾性散乱

縦方向に偏極している e と μ の弾性散乱を考える．§3.8 の 2 成分ニュートリノのところで考察したように $m\to 0$ の極限，つまり十分高エネルギーであれば，

$$\psi_{\mathrm{L}}\equiv\frac{(1-\gamma^5)}{2}\psi, \qquad \psi_{\mathrm{R}}\equiv\frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi \tag{5.86}$$

はそれぞれ，粒子ならばヘリシティが $-(+)$，反粒子ならば $+(-)$ 状態を表す．ヘリシティ状態に分解すると，反応の力学的性質の物理的対応が明瞭になる利点と，弱い相互作用のニュートリノ散乱に適用できる利点がある．ベクトル型相互作用 ($\mathscr{H}_{\mathrm{I}}=-eA_\mu j^\mu=-e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$) の一つの大きな特徴はヘリシティ

を保存すること，より正確にはカイラリティを保存することである．これは次のようにして証明できる．$\psi=\psi_L+\psi_R$ であるから，

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=(\bar{\psi}_L+\bar{\psi}_R)\gamma^\mu(\psi_L+\psi_R)$$

$\gamma^{5\dagger}=\gamma^5$, $\gamma^5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma^5$, $(\gamma^5)^2=1$ の性質を使うと，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_L&=\left\{\frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi\right\}^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\left\{\frac{(1-\gamma^5)}{2}\psi\right\}\\&=\psi^\dagger\gamma^0\frac{(1-\gamma^5)}{2}\gamma^\mu\frac{(1-\gamma^5)}{2}\psi=\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{(1+\gamma^5)}{2}\frac{(1-\gamma^5)}{2}\psi=0\end{aligned}\tag{5.87}$$

同様にして，$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_R=0$ もいえる．一方，$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$, $\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$ に関しては，

$$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L=(1/2)\,\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi\tag{5.88 a}$$

$$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R=(1/2)\,\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi\tag{5.88 b}$$

である．相互作用してもカイラリティが変わらない性質を使うと，通常の eμ 散乱は近似的に次の四つの反応に分解することができる．この近似は $m=0$ で正確である．

$$e_L\mu_L\longrightarrow e_L\mu_L\quad(\mathrm{LL})\tag{5.89 a}$$

$$e_R\mu_L\longrightarrow e_R\mu_L\quad(\mathrm{RL})\tag{5.89 b}$$

$$e_L\mu_R\longrightarrow e_L\mu_R\quad(\mathrm{LR})\tag{5.89 c}$$

$$e_R\mu_R\longrightarrow e_R\mu_R\quad(\mathrm{RR})\tag{5.89 d}$$

まず $e_L\mu_L\to e_L\mu_L$ を考えよう．散乱振幅は eμ 散乱の (5.71) で，$\gamma^\mu\to\gamma^\mu(1-\gamma^5)/2$ として得られるので，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}}=\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}_{fi}|^2\tag{5.90}$$

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2=\frac{e^4}{q^4}K_L{}^{\mu\nu}(p_1,p_3)K_{L\mu\nu}(p_2,p_4)\tag{5.91}$$

$$\begin{aligned}K_L{}^{\mu\nu}&=\frac{1}{4}\sum\bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_r(p_1)(\bar{u}_r(p_1)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u_s(p_3))\\&=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)(\not{p}_1+m_1)\gamma^\nu(1-\gamma^5)(\not{p}_3+m_3)]\end{aligned}\tag{5.92 a}$$

このトレースを計算するには，γ^5 関数の性質

$\gamma^5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma^5$,　　$\gamma^5=-(i/4!)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

$\varepsilon^{0123}=-\varepsilon_{0123}=1$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\pm1$ ($\mu\nu\rho\sigma$ が 0123 の偶置換のとき －，奇置換のとき ＋)

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=0 \text{（それ以外のとき）} \tag{5.93}$$

より導ける関係式

$$\mathrm{Tr}[\gamma^5]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho]=0$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)=-4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{5.94}$$

などを使うと簡略化できて

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{L}}{}^{\mu\nu}(p_1, p_3) &\equiv P^{\mu\nu}-Q^{\mu\nu} \\ &=2\left[\{p_1{}^\mu p_3{}^\nu+p_1{}^\nu p_3{}^\mu-g^{\mu\nu}(p_1p_3)\}-i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{1\rho}p_{3\sigma}\right] \end{aligned} \tag{5.92 b}$$

$K_{\mathrm{L}}{}^{\mu\nu}K_{\mathrm{L}\mu\nu}$ は次の計算結果より求められる．

$$P^{\mu\nu}(p_1, p_3)P_{\mu\nu}(p_2, p_4)=8\{(p_1p_2)(p_3p_4)+(p_1p_4)(p_2p_3)\} \tag{5.95 a}$$

$$Q^{\mu\nu}(p_1, p_3)Q_{\mu\nu}(p_2, p_4)=8\{(p_1p_2)(p_3p_4)-(p_1p_4)(p_2p_3)\} \tag{5.95 b}$$

$$P^{\mu\nu}Q_{\mu\nu}=P_{\mu\nu}Q^{\mu\nu}=0$$

$$\begin{aligned} 4(p_1p_2)(p_3p_4) &=\{(p_1+p_2)^2-p_1{}^2-p_2{}^2\}\{(p_3+p_4)^2-p_3{}^2-p_4{}^2\} \\ &=(s-m_1{}^2-m_2{}^2)(s-m_3{}^2-m_4{}^2) \end{aligned} \tag{5.95 c}$$

同様に，

$$4(p_1p_4)(p_2p_3)=(u-m_1{}^2-m_4{}^2)(u-m_2{}^2-m_3{}^2) \tag{5.96}$$

を使えば，

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{L}}{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{\mathrm{L}\mu\nu}(p_2, p_4) &=16(p_1p_2)(p_3p_4) \\ &=4(s-m_1{}^2-m_2{}^2)(s-m_3{}^2-m_4{}^2) \end{aligned} \tag{5.97}$$

特に質量の無視できる高エネルギーでは

$$K_{\mathrm{L}}{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{\mathrm{L}\mu\nu}(p_2, p_4)=4s^2 \tag{5.98}$$

これを，(5.90)，(5.91) に入れて，$p_i=p_f$ とすれば

$$d\sigma_{\mathrm{LL}}\equiv\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{CM}}(\mathrm{LL})=\frac{\alpha^2}{t^2}s \tag{5.99}$$

$e_{\mathrm{R}}\mu_{\mathrm{L}}$ 散乱のときは電子部の $K_{\mathrm{L}}{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)$ の中の $\gamma^5\to-\gamma^5$ とすればよい．これにより $K_{\mathrm{L}}{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)$ の中の $Q^{\mu\nu}\to-Q^{\mu\nu}$ となるが，$K_{\mathrm{L}}{}^{\mu\nu}(p_2, p_4)$ の方は変わらないので，結局，$Q^{\mu\nu}Q_{\mu\nu}\to-Q^{\mu\nu}Q_{\mu\nu}$ とすればよく，全体の効果は，

$$(p_1p_2)(p_3p_4)\longrightarrow(p_1p_4)(p_2p_3)$$

すなわち $s\to u$ とすればよい．

$$\therefore\quad \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{RL}}=\frac{\alpha^2}{t^2}\frac{u^2}{s}=\frac{\alpha^2}{t^2}s\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 \tag{5.100}$$

同様にして，

$$d\sigma_{LR} = d\sigma_{RL}, \qquad d\sigma_{RR} = d\sigma_{LL} \tag{5.101}$$

が示せる．偏極していないビームの中には，e_R, e_L が始状態には確率的にはそれぞれ 1/2 でしか存在しないことを考慮すると，偏極していない eμ 散乱の断面積は，全部の和をとって 1/4 を掛ければよい．

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha^2}{t^2} \frac{s^2+u^2}{s} = \frac{\alpha^2}{t^2} \frac{s}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1+\cos\theta}{2} \right)^2 \right\} \tag{5.102}$$

$t = q^2$ を考量すれば，これは (5.82) に一致する．

これらの結果はヘリシティ保存から容易に理解できる．重心系では，$e_L\mu_L$, $e_R\mu_L$ 散乱はそれぞれスピン和が 0, 1 のヘリシティ固有状態であって，θ だけ回転した散乱状態はよく知られた回転関数（付録 D）

$$d^0_{0,0} = 1, \qquad d^1_{1,1} = (1+\cos\theta)/2 \tag{5.103}$$

で与えられるからである．この様子は図 5.6 に示されている．スピン 0 のときは θ の値によらず角運動量が保存されているから（図 5.6 (c)）抑圧因子がない．スピン 1 のときは前方散乱（図 5.6 (b)）では角運動量が保存されているが，後方散乱（図 5.6 (d)）では保存されず $(1+\cos\theta)$ の抑圧因子が働くのである．

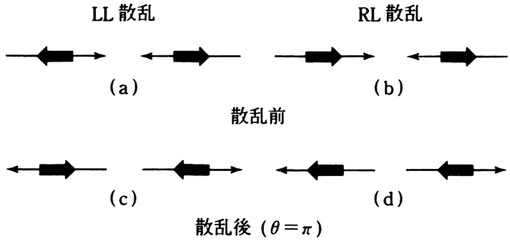


図 5.6 ヘリシティ保存による角分布の差
LL 散乱の場合は角運動量成分和が 0 であるので，いかなる角度でも角運動量が保存している．RL 散乱の場合は散乱前は $J_z = 1/2 + 1/2 = 1$ であるが，$\theta = \pi$ の散乱では $J_z = -1$ となるので，角運動量保存則より $(1+\cos\theta)^2/4$ の抑圧因子がかかる．

さらに，$e_L \leftrightarrow e_R$ の交換は散乱行列要素では $s \leftrightarrow u$ によって得られることに注目しよう．$s \leftrightarrow u$ は入射電子と散乱電子の交叉 ($p_1 \to -p_3$, $p_3 \to -p_1$) で得られるので，粒子 ↔ 反粒子と $R \leftrightarrow L$ は散乱に関する限り同等である．電子

は粒子 ↔ 反粒子により電荷の符号が変わるからどちらをみているか区別ははっきりしているが，電荷をもたないニュートリノが散乱をする場合は自明でない．つまり実験によって，粒子反粒子の区別をしていると思っていたものが単に右と左の区別をしているだけであるという事実がマヨラナニュートリノの可能性の余地を与えているのである．

5.5.3 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 反応の断面積

eμ 散乱振幅において，図 5.7 を参照して $p_2 \to -p_2$, $p_3 \to -p_3$ とすれば，$e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$ 散乱の振幅が得られる．新しい反応での s, t, u を，t チャネルという意味で，t の添え字を付ければ，

$$
\begin{aligned}
s &= (p_1+p_2)^2 &&\longrightarrow (p_1-p_2)^2 = u_t \\
t &= (p_1-p_3)^2 = q^2 &&\longrightarrow (p_1+p_3)^2 = s_t \\
u &= (p_1-p_4)^2 &&\longrightarrow (p_1-p_4)^2 = t_t
\end{aligned}
\tag{5.104}
$$

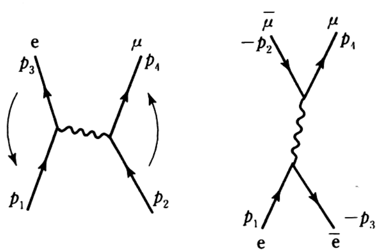


図 5.7 eμ 散乱のファイマン図を交叉して，$p_2 \to -p_2$, $p_3 \to -p_3$ とすれば $e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$ 反応となる

ただし，$e^- \to \mu^-$ の散乱角を θ とし，これを新しい t チャネルとした．eμ の散乱行列要素（の自乗のスピン平均）は，

$$
|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 \sim \frac{(s^2+u^2)}{q^4} \longrightarrow \frac{({t_t}^2+{u_t}^2)}{{s_t}^2} \tag{5.105}
$$

となるので，t の添え字を落として書き直すと，$e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$ の散乱断面積は，

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s^2}\frac{(t^2+u^2)}{2s} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\left[\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta)\right] \tag{5.106}
$$

$$
\sigma_{\mathrm{TOT}} = \int d\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = \frac{87}{s} nb \quad (nb = 10^{-33}\,\mathrm{cm}^2) \tag{5.107}
$$

ただし，s は GeV^2 を単位とする．これは，$e\bar{e}$ 衝突型加速器実験での基礎になる断面積である．

5.6 コンプトン散乱

5.6.1 散乱振幅

フォトンと電子の散乱いわゆるコンプトン散乱の断面積の式はクライン-仁科の公式として知られる．歴史的にはアインシュタインの光量子仮説（1905年）を，コンプトンが実験的に 1923 年に確かに光が粒子のように振る舞うということを証明し，粒子と波動の二重性を明確にした過程として有名である．ここでは後の QCD（グルーオン-クォーク散乱）への応用を頭に描きながら話を進める．扱うプロセスは

$$\gamma(k)+\mathrm{e}(p) \longrightarrow \gamma(k')+\mathrm{e}(p') \tag{5.108}$$

であるが，最低次では図 5.8 (a), (b) に示すような二つのグラフが効く．散乱行列は

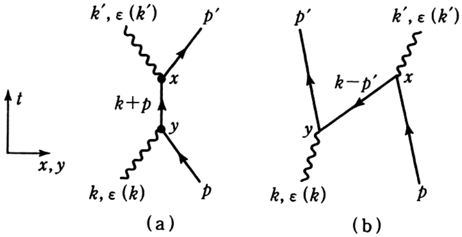


図 5.8 コンプトン散乱に寄与する二つの過程
ここでは，x と y 点の時間差は問題ではない．

$$iT_{fi}=S_{fi}-\delta_{fi}=(-ie)^2/2!\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\langle f|T(j^\mu(x)A_\mu(x)j^\nu(y)A_\nu(y))|i\rangle \tag{5.109}$$

となる．フォトンの部分と電子の部分を分けて書くと，

$$\begin{aligned} iT_{fi}&=(-i)^2e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yT[\langle k'|A_\mu(x)|0\rangle\langle p'|j^\mu(x)j^\nu(y)|p\rangle\langle 0|A_\nu(y)|k\rangle] \\ &=(-i)^2e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\varepsilon'_\mu(k')^*\langle p'|T(j^\mu(x)j^\nu(y))|p\rangle\varepsilon_\nu(k)\mathrm{e}^{ik'x-iky} \end{aligned} \tag{5.110}$$

$$\langle p'|T(j^\mu(x)j^\nu(y))|p\rangle=\langle p'|T(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y))|p\rangle \tag{5.111}$$

となる．$|p\rangle$ を消滅させる演算子 $\psi(x)$ が二つあることに対応して行列要素をつくる方法は二つある．$x^0-y^0>0$ のとき，各演算子の行列指標をあらわに書くと

$$\langle p'|\,\overline{\psi}_\alpha(x)\gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)\,\overline{\psi}_\gamma(y)\gamma^\nu{}_{\gamma\delta}\psi_\delta(y)|p\rangle \qquad (5.112)$$

カギ括弧 1 で示したものは，y 地点で入射粒子 p を消滅させ，x 地点で散乱粒子 p′ を生成させている．カギ括弧 2 で示したものは，x 地点で入射粒子 p を消滅させ，y 地点で散乱粒子 p′ を生成させている．どちらも y 地点でフォトン k を消滅させ，x 地点でフォトン k' を生成しているので，カギ括弧 1 は図 5.8 (a) に対応し，カギ括弧 2 は図 5.8 b に対応することがわかる．カギ括弧 1 の行列要素は

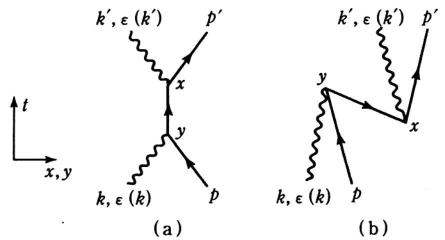


図 5.9　時空でのコンプトン散乱図

図 5.8 (a) の過程が $t_x>t_y$ または $t_x<t_y$ によってさらに図 5.9 の (a) と (b) に分かれる．
(b) での中間状態の電子は時間を逆行する負エネルギー状態の電子として，両者の寄与が一つのファインマンの伝播関数 $S_F(x-y)$ にまとめられる．

$$\bar{u}_\alpha(p')\gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\langle 0|\psi_\beta(x)\,\overline{\psi}_\gamma(y)|0\rangle\gamma^\nu{}_{\gamma\delta}u_\delta(p)\mathrm{e}^{ip'x-ipy} \qquad (5.113)$$

となる．次に，$x^0-y^0<0$ の場合を考えると

$$\langle p'|T(j^\mu(x)j^\nu(y))|p\rangle=\langle p'|j^\nu(y)j^\mu(x)|p\rangle \qquad (5.114)$$

であり，これは，(5.112) で $x\leftrightarrow y$, $\mu\leftrightarrow\nu$, $\alpha\beta\leftrightarrow\gamma\delta$ としたものに等しい．y 地点で入射粒子 p を消滅させ，x 地点で散乱粒子 p′ を生成させる過程は，今度はカギ括弧 2 に対応する（図 5.9 (b) に対応）．このときの行列要素は

$$\bar{u}_\alpha(p')\gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\langle 0|-\overline{\psi}_\gamma(y)\psi_\beta(x)|0\rangle\gamma^\nu{}_{\gamma\delta}u_\delta(p)\mathrm{e}^{ip'x-ipy} \qquad (5.115)$$

となる．(5.113)，(5.115) をまとめると

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle\gamma^\nu u(p)e^{ip'x-ipy} \tag{5.116}$$

と書ける．これは，(4.100) で定義したファインマンの伝播関数であるから，(4.101) を使えば図 5.8 (a) に対応する過程のコンプトン散乱の振幅は

$$\begin{aligned}iT_{fi}=&\int d^4x d^4y e^{i(k'+p')x-i(p+k)y}\varepsilon'_\mu(k')^*\bar{u}(p')(ie\gamma^\mu)\\&\times\left[\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q e^{-iq(x-y)}\frac{(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\varepsilon}\right](ie\gamma^\nu)u(p)\varepsilon_\nu(k)\\=&(2\pi)^4\delta^4(k+p-k'-p')\\&\times\varepsilon'_\mu(k')^*\bar{u}(p')(ie\gamma^\mu)\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2+i\varepsilon}(ie\gamma^\nu)u(p)\varepsilon_\nu(k)\end{aligned} \tag{5.117}$$

図 5.8 (b) の寄与は，カギ括弧の他の部分を同じようにして計算して得られるが，より簡単には $k\leftrightarrow -k'$, $\varepsilon'(k')\leftrightarrow\varepsilon(k)$ の置き換え（交叉）をすればよい．全散乱振幅は

$$\begin{aligned}\mathcal{M}&=\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2\\&=e^2\bar{u}(p')\left[\not{\varepsilon}'^*\frac{(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}\not{\varepsilon}+\not{\varepsilon}\frac{(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}\not{\varepsilon}'^*\right]u(p)\end{aligned} \tag{5.118}$$

ここで $\not{\varepsilon}=\gamma^\nu\varepsilon_\nu$ である．これから後の遷移確率の計算はすでに何度か行っている標準的なトレース計算であるが，後の応用に重要になるのは高エネルギー ($s\gg m^2$) での振る舞いであることを考慮し，電子の質量 m を無視すると計算は簡単になる．

5.6.2 フォトン偏極の和

コンプトン散乱は，実フォトンの入射放出を伴う．フォトン偏極を観測しないときは，電子の場合と同じく始状態については平均を，終状態については和をとる必要がある．ここで扱うフォトンは実フォトンであるので，偏極の自由度は横方向のみの 2 種類である．しかし，フォトン和の計算では形式的に四つの偏極状態があるように考えて

$$\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu(\lambda)^*\varepsilon_\nu(\lambda)=\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\longrightarrow -g_{\mu\nu} \tag{5.119}$$

として差し支えない．理由は，フォトンが保存カレント j^μ に結合しているこ

とにある．$\partial_\mu j^\mu=0$ が成立するので，

$$\omega j^0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0$$

$$-g_{\mu\nu}j^\mu j^\nu=\{\underbrace{-g_{\mu0}g_{\nu0}}_{\text{スカラー}}+\underbrace{k_ik_j/|\boldsymbol{k}|^2}_{\text{縦波}}+\underbrace{(\delta_{ij}-k_ik_j/|\boldsymbol{k}|^2)}_{\text{横波成分}}\}j^\mu j^\nu$$

$$=-j^0j^0+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})^2/|\boldsymbol{k}|^2+\boldsymbol{j}_\mathrm{T}\boldsymbol{j}_\mathrm{T}=j^0j^0\{(\omega/|\boldsymbol{k}|)^2-1\}+\boldsymbol{j}_\mathrm{T}\boldsymbol{j}_\mathrm{T}$$

$$=(k^2/|\boldsymbol{k}|^2)j^0j^0+\boldsymbol{j}_\mathrm{T}\boldsymbol{j}_\mathrm{T} \tag{5.120}$$

$$j_{\mathrm{T}i}=j_i-\frac{k_i}{|\boldsymbol{k}|^2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}),\qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}_\mathrm{T}=0 \tag{5.121}$$

ただし，i,j はそれぞれ μ,ν の空間成分を表す．実フォトンのときは $k^2=0$ であるから，縦波，スカラー成分は相殺して寄与しない．

さて (5.118) に戻って，フォトン電子ともに偏極していないとして，行列要素の自乗をとり平均すると（フォトンの自由度は 2 であることに注意して），

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2\equiv(1/4)\sum|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2=(1/4)\sum[|\mathcal{M}_1|^2+|\mathcal{M}_2|^2+2\mathrm{Re}\mathcal{M}_1\mathcal{M}^*{}_2]$$

$$=2e^4\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}\right) \tag{5.122}$$

干渉項は消える．このとき $s-m^2=2(kp)$, $u-m^2=-2(k'p)$ を使った．断面積は付録 (C.20) を参照して

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi(s-m^2)^2}\simeq\frac{2\pi\alpha^2}{s^2}\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}\right) \tag{5.123}$$

演習 5.10 (5.118) を $\varepsilon'_\mu{}^*\varepsilon_\nu\mathcal{M}^{\mu\nu}$ と書くとき，ゲージ不変性 ((4.64) 参照) は $\varepsilon'_\mu{}^*\to\varepsilon'_\mu{}^*+ck'_\mu$, $\varepsilon_\nu\to\varepsilon_\nu+ck_\nu$ での不変性を要求するので，

$$k_\nu\mathcal{M}^{\mu\nu}=k'_\mu\mathcal{M}^{\mu\nu}=0 \tag{5.124}$$

が成立するはずである．これを (5.118) の $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ について実際に計算して確かめよ．

演習 5.11 ゲージ不変性が図 5.8 (a)，または (b) 単独では成立しないが，両者を合わせると成立することを示せ．

演習 5.12 入射フォトンを仮想光子とし，質量を $k^2=-Q^2$ とすると，干渉項が 0 とならず，(5.122) は

$$2e^4\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}+\frac{2Q^2t}{su}\right) \tag{5.125}$$

となることを示せ．この式は QCD で頻出する．

演習 5.13* 電子の質量を無視せずとも実験室系で計算すると簡単になる．

$k=(\omega;\boldsymbol{k})$, $k'=(\omega';\boldsymbol{k}')$, $p=(m;0,0,0)$, $\varepsilon=(0;\boldsymbol{\varepsilon})$ とすれば，

$$\varepsilon\cdot p=\varepsilon'\cdot p=\varepsilon\cdot k=\varepsilon'\cdot k'=0$$
$$\varepsilon\cdot p'=-\varepsilon\cdot k',\qquad \varepsilon'\cdot p'=\varepsilon'\cdot k$$

が成立する．電子についてはスピン平均をとりフォトンの偏極は保持することにする．単純ではあるが長いトレース計算をして，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}}=\frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-2+4(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}')^2\right] \tag{5.126}$$

を導け．これはクライン-仁科公式として知られる．

5.7 ファインマン規則

これまでの計算で，不変振幅のつくり方，計算の仕方には一定のルールがあることがわかった．今までも計算の助けに簡単なグラフの助けを借りたが，実はこうしたファインマングラフと計算に現れる要素には 1：1 の対応があり，多少の経験を積むと計算が非常に容易になる．ここではこれまで習熟した要素をまとめておく．散乱行列は，$S=T\exp\left(-i\int H_{\mathrm{I}}\mathrm{d}^4x\right)$ で表されるので，基本的には相互作用の形さえ知ればすぐに書き下ろせるはずのものである．スピン 1/2 粒子（電子を想定する）と電磁場の相互作用の場合は，

$$-iH_{\mathrm{I}}=-iqe\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}(x)\qquad(\text{電子の } q=-1)$$

であるので，外線（外から入射する粒子または外へ出て行く粒子）には，波動関数

	生成	消滅	
電子	：$\overline{\psi}(x)\longrightarrow \bar{u}(p')e^{ip'x}$,	$\psi(x)\longrightarrow u(p)e^{-ipx}$	(5.127 a)
陽電子	：$\psi(x)\longrightarrow v(p')e^{ip'x}$,	$\overline{\psi}(x)\longrightarrow \bar{v}(p)e^{-ipx}$	(5.127 b)
フォトン	：$A_{\mu}(x)\longrightarrow \varepsilon'_{\mu}(k')^{*}e^{ik'x}$,	$A_{\mu}(x)\longrightarrow \varepsilon_{\mu}(k)e^{-ikx}$	(5.127 c)

をそれぞれ対応させる（図 5.10）．ヴァーテックスには，因子

$$\text{ヴァーテックス}:\longrightarrow -iqe\gamma \tag{5.128}$$

を対応させる．ヴァーテックスとヴァーテックスをつなぐ線を内線といい，場の波動方程式のグリーン関数（ファインマンの伝播数）に対応させる．まず基本としてのスカラー場は

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle=i\Delta_{\mathrm{F}}(x-y),$$
$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu}+m^2)\Delta_{\mathrm{F}}(x)=-\delta^4(x) \tag{5.129}$$

から，伝播関数として，

$$i\Delta_{\mathrm{F}}(p^2)=\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} \tag{5.130}$$

フォトンは偏極和を必要とするから，分子に偏極和 $\sum\varepsilon^{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\nu}(\lambda')^{*}g_{\lambda\lambda'}=-g^{\mu\nu}$ を付加して

$$iD_{\mathrm{F}}{}^{\mu\nu}(p^2)=\frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2+i\varepsilon} \tag{5.131}$$

スピン 1/2 粒子は

$$\langle 0|T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|0\rangle=iS_{\mathrm{F}}(x-y)$$
$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)S_{\mathrm{F}}(x)=\delta^4(x) \tag{5.132}$$

から

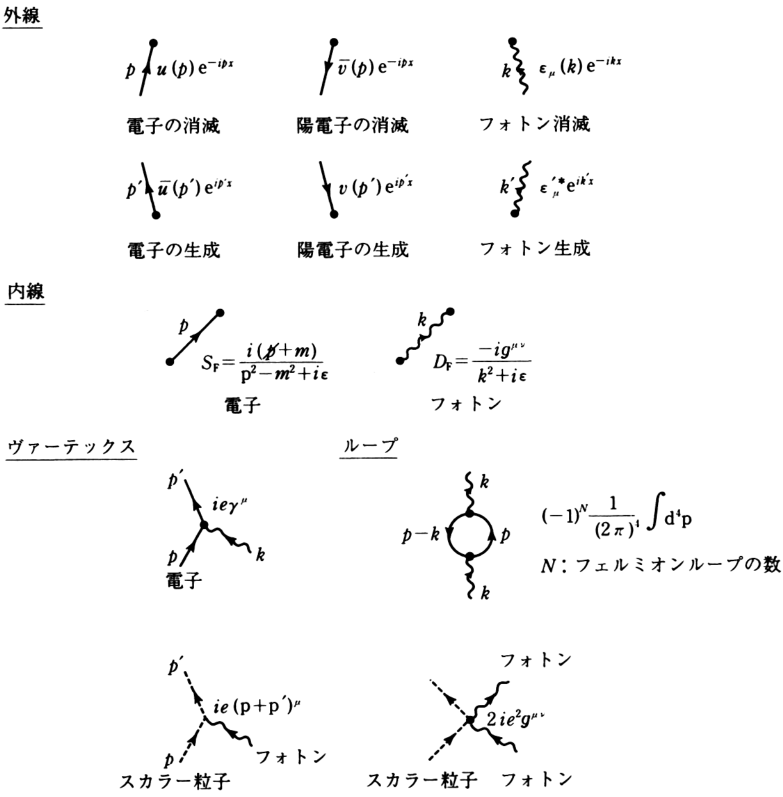


図 5.10　ファイマン規則の図解

$$iS_F(p^2)=\frac{i}{\not p-m}=\frac{i(\not p+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon} \qquad (5.133)$$

を対応させる．

次にハミルトニアン密度の時空積分から各ヴァーテックスには，δ 関数が生じる．内線の運動量については積分するから，δ 関数は全体のエネルギー運動量保存則を示すただ1個以外はすべて消える．したがって，各内線の運動量については，外線から運動量が保存するように順次割り当てていく．

高次効果として内線の閉ループがあるときは（後述），内線自由度変数 p に関して δ 関数による制限がつかないので，和すなわち $\int d^4p/(2\pi)^4$ を実行しなければならない．フェルミオンループの場合はループの数だけ (-1) を掛け，γ 行列に関してはトレースをとる．

なお，後のためスカラー粒子と質量のあるベクトル粒子についても記述しておくと，スカラー粒子の相互作用は，

$$-iH_I=-eA_\mu[\phi^\dagger\partial^\mu\phi-(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi]+ie^2A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}\phi^\dagger\phi$$

であるので（クライン-ゴルドンの式に $\partial_\mu\rightarrow\partial_\mu-ieA_\mu$ を適用すると得られる）ヴァーテックスにはそれぞれ，

$$-ie(p_1+p_2)^\mu, \qquad 2ie^2g^{\mu\nu} \qquad (5.134)$$

を対応させる．ベクトル粒子はヴァーテックスはフォトンと同じであるが，伝播関数は質量と偏極和に縦波成分が入る分だけ異なる．

$$i\varDelta_F{}^{\mu\nu}(k^2)=\frac{-i(g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu/m^2)}{k^2-m^2+i\varepsilon} \qquad (5.135)$$

5.8　放射補正とくりこみ（*）

われわれはこれまで，反応の遷移行列を計算するのに最低次（トリー図）のみを使ってきた．基本的な理解はこれで十分であるし，理論的な煩雑さに巻き込まれるのは本書の意図するところではないからである．しかし，高次の効果を計算すると無限大の発散が出現することは場の量子論の初期からの問題であり，素粒子理論の歴史はいかにこれを克服するかの歴史でもあった．ここでは，実験データとの比較に欠かせない放射補正や，統一理論の根本にある物理

概念を理解するのに必要最小限だけの内容を概観しておく．

5.8.1　有効結合定数

外場もしくは運動する荷電粒子によりつくられた場（仮想フォトン）が他の荷電粒子に作用を及ぼす効果を考える（図 5.11）．これまでは図 5.11 (b) に対応する効果だけを取り扱った．これは実効的には外場によるモット散乱であり，振幅としては

$$ie\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}[ej_\nu(q)] \tag{5.136}$$

のように書ける．高次の効果は，図にあるように，ヴァーテックスに対する補正 (c)，フォトン伝播関数に対する補正 (d)，電子伝播関数に対する補正 (e)，(f) のように分類できる．いま，ヴァーテックス効果を考える．前述のファインマン規則を当てはめると

$$ie\Gamma^\mu=(ie)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i}{k^2}\left[\gamma^\nu\frac{i(\not{p}'-\not{k}+m)}{(p'-k)^2-m^2}(ie\gamma^\mu)\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2}\gamma^\nu\right] \tag{5.137}$$

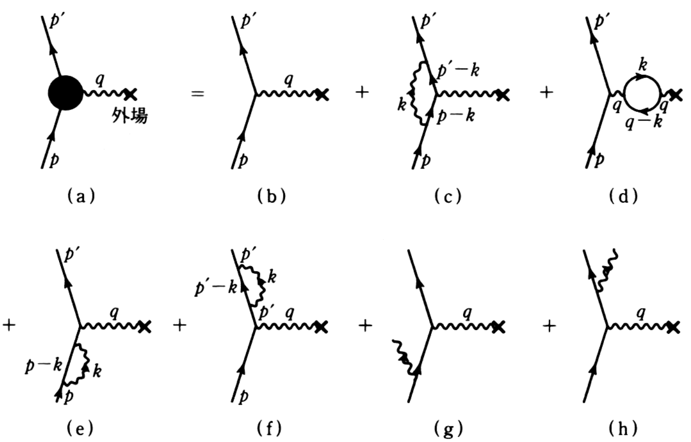


図 5.11　QED 高次補正

電子と外場との相互作用 (a) は最低次では (b) で表される．高次補正には，(c) ヴァーテックス補正，(d) フォトンの伝播関数補正（真空偏極），(e) (f) 電子の伝播関数補正がある．(c)，(d)，(e)，(f) のループからは紫外発散と赤外発散が生じるが，紫外発散はくりこみの処方で処理する．赤外発散は (g)，(h) の制動放射と最低次の (b) 図との干渉項により相殺される．

となるが，kの羃を勘定すればすぐわかるようにこの積分は，$k\to\infty$で$\ln k$のように発散する．これを紫外発散 (ultraviolet divergence) と呼ぶ．一方，この積分は$k\to 0$でも発散する．これを赤外発散 (infrared divergence) と呼ぶ．赤外発散は物理的に妥当な解釈が可能であり，基本的に困難のある問題ではない．

a. 赤外発散

赤外発散は$k\to 0$のフォトン（ソフトフォトン）に引き起こされる．図5.11 (c) にあるのは3次($O(e^3)$)の効果である．物理的には (b) の効果 ($O(e)$で1次の効果) と区別がつかないから，実際には両方足して自乗する．したがって，自分自身からは6次の効果，図 (b) との干渉項からは4次の効果が現れる．ところで，(g), (h) のような実フォトンを放出する過程（制動放射）は2次であるが自乗すると4次の効果となる．制動放射はやはり$k\to 0$で発散して同じ悩みをもつ．しかし，QEDでは無限大を与える項は両者が相殺し，有限な結果のみを与えるようになっている（実はゲージ理論に普遍的な性質である)．電子が散乱する反応とその際同時にフォトンをも発生する過程とは，物理的に区別のつく過程であるから両者を一緒にしてはならないと思うかもしれない．しかし，実験的に考えてみよう．実験では電子の通過をカウンターで測り，運動量は磁場での曲率を測って知る．実際に用いるカウンターは有限の大きさ，したがって有限の立体角をもつ．また感度も無限に精度の良い測定器はありえずかならず誤差を伴う．ソフトフォトンが放出された場合，エネルギーが低すぎて検出器に感じないか，電子と並んで走るかして同じ検出器に入り，電子と同時に計測してしまうであろう．これは検出器のつくり方の問題であって原理上の問題ではないという疑問に対しては，無限大の精度をもつ検出器の製作は原理的に不可能であるといっておく．結局実験で測るのは測定器の分解能の範囲での$0, 1, 2, 3, \cdots n$フォトンを含む全断面積なのであり，これに対しては計算も有限値を与える．したがって，赤外発散を含む計算をするときは，原理的には測定器の構造または測定法を知らなければならない．質量0の量子を含む理論では常に生じる問題である．フォトン数を数えずにすべてを積分してしまうような全断面積または包含反応 (inclusive reaction;1個または有限少数個の粒子のみ特定し，他は観測しない過程）では，測定条件によ

らない有限結果を理論的に算出できる．

b．紫外発散

赤外発散に比べると相当厄介である．この解決にはくりこみの処方を使う．くりこみを理解するため (d) のフォトン伝播関数の途中にフェルミオンループがある場合の補正を考える．ループ補正の寄与を入れると，補正がない場合の伝播関数に比べ

$$\frac{g^{\mu\nu}}{iq^2} \longrightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{iq^2}+\frac{g^{\mu}{}_{\lambda}}{iq^2}(-i\Pi^{\lambda\sigma})\frac{g^{\nu}{}_{\sigma}}{iq^2}=\left[g^{\mu\nu}+\frac{1}{iq^2}(-i\Pi^{\mu\nu})\right]\frac{1}{iq^2}$$

$$-i\Pi^{\mu\nu}=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[ie\gamma^{\mu}\frac{i(\not k+m)}{k^2-m^2}ie\gamma^{\nu}\frac{i(\not q-\not k+m)}{(q-k)^2-m^2}\right] \quad (5.138\,\mathrm{a})$$

のように変更される．この積分は k の冪を勘定すると，$\sim k^2$ のように発散しそうであるが，ゲージ不変性のため

$$q_{\mu}\Pi^{\mu\nu}=q_{\nu}\Pi^{\mu\nu}=0 \quad (5.139)$$

が成立するので，

$$\Pi^{\mu\nu}=(q^2g^{\mu\nu}-q^{\mu}q^{\nu})\Pi_{\gamma}(q^2) \quad (5.138\,\mathrm{b})$$

の形をとることが保証される．この結果 $\Pi_{\gamma}(q^2)$ の冪の数が 2 軽減され，(c) と同じ対数発散になる．後のために，

$$\Sigma_{\gamma\gamma}(q^2)\equiv q^2\Pi_{\gamma}(q^2) \quad (5.138\,\mathrm{c})$$

を定義すれば

$$\Pi^{\mu\nu}=\left(g^{\mu\nu}-\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2}\right)\Sigma_{\gamma\gamma}(q^2) \quad (5.138\,\mathrm{d})$$

計算によれば[2)]

$$\Pi_{\gamma}(q^2)=\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}-\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dz\, z(1-z)\ln\left[1-\frac{q^2z(1-z)}{m^2}\right] \quad (5.140)$$

Λ は積分を有限にするために導入した切断定数（カットオフ）である．第 2 項は $|q|^2\to 0$ で有限な項であり，

$$\Pi_{\gamma}(q^2)=\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{\alpha q^2}{15\pi m^2} \qquad (-q^2\to 0) \quad (5.141)$$

$|q|^2\to\infty$ のときは，第 2 項は $\ln(-q^2/m^2)$ のようになり，

$$\Pi_{\gamma}(q^2)=\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{-q^2}{m^2} \qquad (-q^2\to\infty) \quad (5.142)$$

最低次の項（図 5.11 (b)）

$$ie\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\frac{g^{\mu\nu}}{iq^2}[ej_\nu(q)] \tag{5.136}$$

に図 5.11 (d) の寄与を合わせると，

$$ie\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\left[\frac{g^{\mu\nu}}{iq^2}+\frac{g^{\mu}{}_{\lambda}}{iq^2}(-i\Pi^{\lambda\sigma})\frac{g^{\nu}{}_{\sigma}}{iq^2}\right][ej_\nu(q)] \tag{5.143 a}$$

となる．$\Pi^{\mu\nu}$ の中の $q^\mu q^\nu$ に比例する項は保存カレントと結合して寄与しない（$q^\mu j_\mu=0$，または $q^\mu \bar{u}\gamma_\mu u=0$）ので，$|q^2|\to 0$ の場合を考えると (5.143 a) は

$$\to ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}-\frac{\alpha q^2}{15\pi m^2}\right][ej_\nu(q)] \tag{5.143 b}$$

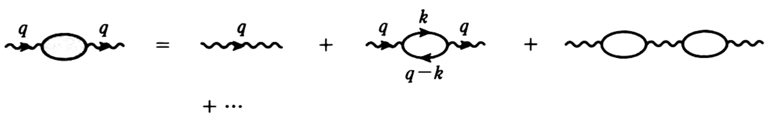
ここで，

$$e\longrightarrow e_{\mathrm{R}}=e\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right]^{1/2}\equiv Z_3{}^{1/2}e \tag{5.144}$$

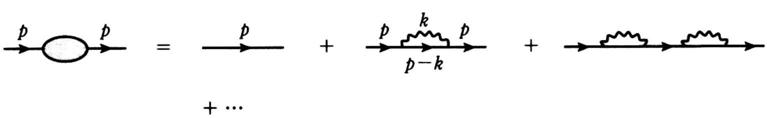
とおけば，(5.143) は $O(e_{\mathrm{R}}{}^2)$ の近似で

$$\to ie_{\mathrm{R}}\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\left[1-\frac{\alpha_{\mathrm{R}}q^2}{15\pi m^2}\right][e_{\mathrm{R}}j_\nu(q)] \tag{5.145}$$

$$\alpha_{\mathrm{R}}=e_{\mathrm{R}}{}^2/4\pi \tag{5.146}$$



(a) $iD'_{\mathrm{F}}=iD_{\mathrm{F}}+iD_{\mathrm{F}}(-i\Sigma_{\gamma\gamma})iD_{\mathrm{F}}+\cdots$



(b) $iS'_{\mathrm{F}}=iS_{\mathrm{F}}+iS_{\mathrm{F}}(i\Sigma_e)iS_{\mathrm{F}}+\cdots$

図 5.12　高次補正による伝播関数のくりこみ
(a)　フォトンの伝播関数：2 次ループ補正とその繰り返しの和
(b)　電子の伝播関数：2 次ループ補正とその繰り返しの和

さて，フォトンはいつでも電子対をつくって，余分の自己エネルギーをもてる．そこで (5.138) の置き換えを個々のフォトン伝播関数のすべてに適用すれば，これは図 5.12 (a) のように次々に真空偏極を行う効果をすべて足し合わせたものとなり，(5.138) は，

$$\frac{g^{\mu\nu}}{iq^2} \longrightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{iq^2} + \frac{g^{\mu\nu}}{iq^2}(-i\Sigma_{\gamma\gamma})\frac{1}{iq^2} + \frac{g^{\mu\nu}}{iq^2}(-i\Sigma_{\gamma\gamma})\frac{1}{iq^2}(-i\Sigma_{\gamma\gamma})\frac{1}{iq^2} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{g^{\mu\nu}}{i(q^2 + \Sigma_{\gamma\gamma}(q^2))}$$

$$= \frac{g^{\mu\nu}}{iq^2}\frac{1}{1+\Pi_\gamma(q^2)} = \frac{g^{\mu\nu}}{iq^2}\frac{1}{1+\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \hat{\Pi}_\gamma(q^2)}$$

$$= \frac{g^{\mu\nu}}{iq^2}\frac{Z_3}{1+Z_3\hat{\Pi}_\gamma(q^2)} \tag{5.147}$$

$\hat{\Pi}_\gamma(q^2)$ は次式で定義される．$\Pi_\gamma(q^2)$ から $\Pi_\gamma(0)$ を差し引いた量で，Λ によらない q^2 の有限な解析関数である．

$$\Sigma_{\gamma\gamma}(q^2) = q^2\Pi_\gamma(q^2) \tag{5.148}$$

$$\Pi_\gamma(q^2) = (Z_3)^{-1} - 1 + \hat{\Pi}_\gamma(q^2, \alpha) = \Pi_\gamma(0) + \hat{\Pi}_\gamma(q^2)$$
$$\Pi_\gamma(0) = (Z_3)^{-1} - 1 = \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} \tag{5.149}$$

伝播関数の両端には常に e^2 があるから（(5.136) を見よ），Z_3 をそちらに移して，

$$e^2 \longrightarrow e_R{}^2 = Z_3 e^2 \tag{5.150}$$

とする．また (5.147) を見ればわかるように，$\hat{\Pi}_\gamma$ の中にも e^2 が入っているので，

$$Z_3\hat{\Pi}_\gamma(q^2) = Z_3\hat{\Pi}_\gamma(q^2, e^2) = \hat{\Pi}_\gamma(q^2, e_R{}^2) \tag{5.151}$$

と置き換えて e_R を有限量とみなしてやれば，フォトンの伝播関数はすべて，有限量で書き直せる．さらに

$$e_R{}^2(q^2) \equiv \frac{Z_3 e^2}{1+\hat{\Pi}_\gamma(q^2)} = \frac{e_R{}^2}{1+\hat{\Pi}_\gamma(q^2)} \tag{5.152}$$

によって，結合定数 $e_R{}^2$ を q^2 の関数と見なし，これを有効結合定数（running coupling constant）と呼べば，フォトン伝播関数の高次補正の効果は，結合定数を有効結合定数に置き換えることに帰着する．以上の議論から，紫外発散項は分離して形式的に結合定数の中に押し込める（くりこむ）ことができた．

5.8.2 質　量　補　正

今度は電子の放射補正を考えてみよう．例えばコンプトン散乱の振幅を考えてみるに，電子の内線（伝播関数）として，

$$iS_F(p)=\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2}=\frac{i}{\not{p}-m} \tag{5.153}$$

がでてくる．この高次効果は，電子がフォトンを放出して再吸収する過程であり，図 5.12 (b) のようなグラフである．フォトンのときと同様にループが繰り返される梯子型のグラフは全部足し合わせることにすれば，

$$\frac{i}{\not{p}-m}+\frac{i}{\not{p}-m}(i\Sigma_e(p))\frac{i}{\not{p}-m}+\cdots\cdots \tag{5.154}$$

$$i\Sigma_e(p)=(ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon}\gamma^\mu \tag{5.155}$$

ただし，λ は赤外発散を避けるために導入したフォトンの質量である．k の冪（べき）を数えればわかるように，この積分はフォトンの自己エネルギーと同じく紫外発散する．そこで，前と同じく発散を途中で切断するパラメター Λ を導入して積分を実行すると[2)]

$$\Sigma_e(p)=\delta m+(\delta Z_2+\hat{\Pi}_e(p^2))(\not{p}-m) \tag{5.156}$$

$$\delta m=\Sigma_e(m)=-\frac{3\alpha m}{4\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} \tag{5.157}$$

$$\delta Z_2=\left.\frac{\partial\Sigma_e(p)}{\partial p}\right|_{\not{p}=m}=\frac{\alpha}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}-2\ln\frac{m^2}{\lambda^2}\right)\equiv(Z_2)^{-1}-1 \tag{5.158}$$

無限大に発散する量は，$\delta m, \delta Z_2$ の中に押し込めて，分離した後の $\hat{\Pi}_e(p)$ は，Λ を含まず，有限な集束する関数で，$\not{p}=m$ で，$\hat{\Pi}_e(p)=0$ となる量である．これらの量を使って (5.154) を書き直せば，

$$\begin{aligned}iS_F=\frac{i}{\not{p}-m}\longrightarrow\frac{i}{\not{p}-m}\left(1+\Sigma_e(p)\frac{1}{\not{p}-m}\right)^{-1}&=\frac{i}{\not{p}-m+\Sigma_e(p)}\\&=\frac{i}{\{(Z_2)^{-1}+\hat{\Pi}_e(p^2)\}(\not{p}-m)+\delta m}\\&=\frac{iZ_2}{\{1+Z_2\hat{\Pi}_e(p^2)\}(\not{p}-m)+Z_2\delta m}\\&=\frac{iZ_2}{\{1+\hat{\Pi}_e(p^2)\}(\not{p}-m+\delta m)}+O(\alpha^2)\end{aligned} \tag{5.159}$$

ここで，$m_R=m-\delta m$ を改めて質量であると定義すれば，電子の伝播関数は，

くりこまれた質量 m_R と Z_2 以外は有限量を用いて表すことができる．

$$iS_F=\frac{i}{\not{p}-m}\longrightarrow\frac{Z_2}{\{1+\hat{\Pi}_e(p^2)\}}\frac{i}{\not{p}-m_R} \tag{5.160}$$

なお図 5.11 (e)，(f) のように，電子が入射，または散乱粒子で，伝播関数の一方の端が外線となっているときは，$p^2=p'^2=m^2$ であるので，$\hat{\Pi}_e(p)=0$ となり，くりこみの効果は，$m\to m_R$ とする以外は定数 Z_2 が掛かるのみである．したがって，高次効果による有限な補正 $(1/(1+\hat{\Pi}_e(p^2)))$ は内線に対してのみ掛かることがわかる．

5.8.3　ワード-高橋の恒等式

ヴァーテックスの補正は，(5.137) を計算してやればよい．

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\longrightarrow\bar{u}(p')[\gamma^\mu+\Gamma^\mu(p',p)]u(p) \tag{5.161}$$

になり，やはり無限大の項がでるが，これまでと同様にして $q=p'-p\to 0$, $\not{p}'=m$, $\not{p}=m$ の極限を考えて分離することができる．すなわち，

$$\Gamma^\mu(p',p)=\Gamma^\mu(m,m)+\text{有限項}\equiv[(Z_1)^{-1}-1]\gamma^\mu+\text{有限項}^{*4)} \tag{5.162}$$

この結果ヴァーテックスは放射補正によって，

$$\gamma^\mu\longrightarrow Z_1^{-1}\ (\gamma^\mu+\text{有限な項}) \tag{5.163}$$

という形になる．Z_1 は直接計算しなくても，次式を用いれば容易に求められる．

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{1}{\not{p}-m}=-\frac{1}{\not{p}-m}\gamma^\mu\frac{1}{\not{p}-m} \tag{5.164}$$

この式の意味は自由な伝播関数を運動量に関して微分したものは，伝播関数の途中に 0 エネルギーのフォトンを結び付けることに等しいということである．これは一般化できて，どんな複雑なヴァーテックスでも対応する伝播関数を微分することにより，

$$\Gamma^\mu(p,p)=-\frac{\partial\Sigma_e(p)}{\partial p^\mu} \tag{5.165}$$

---

*4)　有限項は，一般に

$$A(q^2)\gamma^\mu+B(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$$

の形をとる．第 1 項は電荷の補正であるが，第 2 項は磁気相互作用項であり，高次補正効果で異常磁気能率が発生することがわかる．

が成立する．これをワード-高橋の恒等式という．(5.137) の Γ^{μ} と (5.155) の Σ_e について成立していることは容易に確認できる．(5.156) を微分して (5.162) と比較すれば直ちに

$$Z_1 = Z_2 \tag{5.166}$$

5.8.4 散乱振幅のくりこみ

ここで，ヴァーテックスや電子の伝播関数を補正することにより出現する Z_2 や Z_1 が最終的にどうなるかをみるために，コンプトン散乱の振幅を例にとって考察してみよう (図 5.13)．コンプトン散乱の場合，摂動最低次の寄与のうち，図 5.13 (a) の左側のファイマングラフに対応する振幅 (5.167) を具体的に書き下ろすと，

$$\mathcal{M} \sim \varepsilon'^{*}_{\mu} \bar{u}'(ie\gamma^{\mu}) \frac{i}{(\not{p} + \not{k} - m)} (ie\gamma^{\nu}) u \varepsilon_{\nu} \tag{5.167}$$

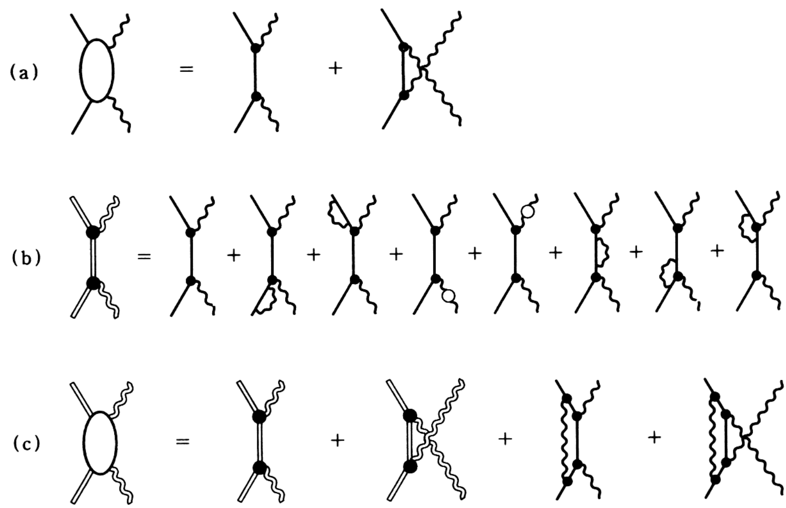


図 5.13 コンプトン散乱振幅

(a) コンプトン散乱の最低次のファインマングラフ．

(b) (a) の第 1 項の高次効果を示す．質量と電荷のくりこみ，伝播関数を補正した後の電子線，フォトン線，ヴァーテックスをそれぞれ太線，黒丸で表した．

(c) コンプトン散乱の第 4 次までの補正効果には，第 3 項のようなヴァーテックスや伝播関数の補正のみでは取り入れられない効果，すなわち，散乱振幅への直接補正効果も存在する．

という形をしている．ここの議論では，スピン指標や運動量は関係ないので，$\bar{u}_s(p_3)\to\bar{u}'$，$u_r(p_1)\to u$ のように簡略化した．高次効果の影響をも入れると電子などフェルミオンには入射線と放出線および内線（伝播関数）にそれぞれ Z_2 が掛かる．同様に，フォトンの外線や伝播関数には Z_3 が掛かり，各ヴァーテックスには Z_1^{-1} が掛かる．すなわち，高次効果を取り入れた散乱振幅は

$$\mathcal{M}\sim Z_3\varepsilon'_\mu{}^* Z_2\bar{u}'(iZ_1^{-1}e\gamma^\mu)\frac{iZ_2}{(\not{p}+\not{k}-m)}(iZ_1^{-1}e\gamma^\nu)Z_2uZ_3\varepsilon_\nu(1+\cdots\cdots) \tag{5.168}$$

のようになる．括弧の中の……は，高次補正効果（図 5.13 (b)）の中から δm や Z_1 を取り除いた後の有限な補正項を，（必ずしもこのような形になるとは限らない項をも含めて）まとめてこう表した．ここで，Z_2, Z_3 をそれぞれ二つに分けて，$Z_2^{1/2}\times Z_2^{1/2}$，$Z_3^{1/2}\times Z_3^{1/2}$ として各波動関数とヴァーテックスにある電荷 e にそれぞれ付けてやると，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}&\sim Z_3^{1/2}\varepsilon'_\mu{}^* Z_2^{1/2}\bar{u}'(iZ_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}e\gamma^\mu)\frac{i}{(\not{p}+\not{k}-m)}\\&\quad\times(iZ_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}e\gamma^\nu)Z_2^{1/2}uZ_3^{1/2}\varepsilon_\nu(1+\cdots\cdots)\\&=\varepsilon_{\mathrm{R}}'{}_\mu{}^*\bar{u}_{\mathrm{R}}'(ie_{\mathrm{R}}\gamma^\mu)\frac{i}{(\not{p}+\not{k}-m)}(ie_{\mathrm{R}}\gamma^\nu)u_{\mathrm{R}}\varepsilon_{\mathrm{R}}(1+\cdots\cdots)\end{aligned} \tag{5.169}$$

となる．この散乱振幅は，発散する量 Z_i を含まない．すなわち

$$e\longrightarrow Z_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}e=Z_3^{1/2}e=e_{\mathrm{R}} \tag{5.170 a}$$

$$\psi\longrightarrow\psi_{\mathrm{R}}=Z_2^{1/2}\psi,\qquad\bar{\psi}\longrightarrow\bar{\psi}_{\mathrm{R}}=Z_2^{1/2}\bar{\psi} \tag{5.170 b}$$

$$A_\mu\longrightarrow A_{\mathrm{R}\mu}=Z_3^{1/2}A_\mu \tag{5.170 c}$$

$$m\longrightarrow m_{\mathrm{R}}=m-\delta m \tag{5.170 d}$$

の置き換えによって，δm が質量の再定義の中に，すべての Z_1, Z_2, Z_3 が，電荷と波動関数の再規格化（くりこみ）された波動関数，電荷の中に吸収できることがわかる．図 5.13 (a) の右側のファイマン図に対する補正も同様にできるが，コンプトン散乱の高次効果には，図 5.13 (c) の第 3, 4 項に相当するような寄与，つまり散乱振幅そのものに対する補正効果もある．この振幅は有限な寄与を与えるので，上記の $(1+\cdots\cdots)$ の中に寄与する．

結局，すべての発散量は電荷と質量のくりこみ，波動関数の再規格化によって吸収でき，物理量は有限量のみで書き表されることになる．

なお，結合定数を有効結合定数と見なすときは，q^2 依存性はフォトン伝播関数およびヴァーテックス補正より，p^2 依存性，p'^2 依存性は，ヴァーテックスおよびそれぞれの電子伝播関数補正より生じるので，一般には

$$e_R = e_R(q^2, p^2, p'^2)$$

となる．コンプトン散乱の場合は，$p^2=m^2$，$k^2=0$ となるので，

$$e_R = e_R(s), \qquad s=(p+k)^2$$

である．

以上に議論したくりこみの処方は，いささかまやかしのようにみえる．無限大の項は質量 m_R，電荷 e_R と波動関数の規格定数の中にあり，見かけ上隠しただけである．しかし，よく考えるとわれわれが実験で測っているのはそもそもすべての補正項を入れた後の質量や電荷であって，この m_R や e_R こそ（m_R $=0.511$ MeV，$\alpha_R=1/137.\cdots$ という値をもつ）正規の質量，電荷であり，はじめのラグランジアンに現れた m や e は単なるパラメターと見なすのが正しい．こうした無限大の処理法を与え，QED を理論として確立したのが朝永-シュウィンガー-ファインマンであった．しかし，場の量子論において，無限大の発散をはじめからないようにする処方がないのも事実で，こうした事後の粉飾処理のようなやり方は，実験データと比較して一致してはじめて正当化できる．こうしたやり方でどのくらい実験値を再現するかテストしてみよう．

5.8.5 QED の 検 証

a. ラムシフト

上で計算した補正後のフォトン伝播関数を使った振幅 (5.145) は第 1 項が通常のクーロン力を与える．第 2 項が QED による補正で真空偏極効果といわれる．真空は空間に何もない無の状態ではなく，ハイゼンベルグの不確定性原理の許す範囲で，荷電粒子対が発生消滅を繰り返しており，電荷が存在すれば対には逆方向の力が働いて分極が起こる．真空といえども誘電体としての性質をもっていて，上記の計算はその効果を表したものである．これを水素原子の準位に適用することができる．水素原子の準位はディラック方程式にクーロン項を入れて計算できるが，$s_{1/2}$ と $p_{1/2}$ の準位は縮退している．上の補正項は q^2 に比例するので空間座標に直すと ∇^2 となり，クーロンポテンシャルに適用す

ると δ 関数を与える．つまり波動関数の原点での値のみが寄与するので，s 波状態には寄与するが，$l>0$ の p 波には寄与しない．したがってこの補正は $s_{1/2}$ と $p_{1/2}$ の縮退を解く働きがある．放射補正はこの真空偏極だけではなく，他の寄与，例えばヴァーテックス補正も存在するが（ラムシフトの場合は実はこちらの寄与の方が大きい），いずれにせよ実験は精密測定が可能で，これらの補正をテストできる．このラムシフトの実験結果を見事に説明したのが QED の最初の成果であった．

b． $g-2$

ヴァーテックスの補正からは $\sigma^{\mu\nu}$ に比例する項が出現する．これは高次効果による磁気能率の補正であり，ディラック粒子が $g=2$ の磁気能率をもつという記述は正確には正しくない．この計算はさらに高次まで進められ[3]，実験値と比較すると[4]

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_e=0.5\frac{\alpha}{\pi}-0.32848\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2+1.19\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=(1159652400\pm400)\times10^{-12} \tag{5.171 a}$$

$$\text{実験値}=(1159652193\pm80)\times10^{-12} \tag{5.171 b}$$

同様な計算は μ に対しても行われて[5]，

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu=0.5\frac{\alpha}{\pi}+0.76578\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2+24.45\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=(1165851.7\pm2.3)\times10^{-9} \tag{5.172 a}$$

$$\text{実験値}=(1165923\pm8)\times10^{-9} \tag{5.172 b}$$

電子とミューオンで値が違うのは質量の差を反映している．ミューオンの場合は，実験値との一致は悪いが，これは QED だけの計算であり，実は仮想フォトンがハドロンになる過程がある．これは電子にはほとんど効かないがミューオンに対して，高エネルギーの $e^+e^-\to$ ハドロンの実験値を使い補正すると 1165918 ± 10 となり，見事に一致する．無限大の処理に一見無理があるとはいえ，これほど正確に実験値を再現する理論には真実があるとみるべきであろう．くりこみの処方は正しいと確信をもっていえるのはこうした事実に支えられている．

5.8.6 QEDの高エネルギー限界

QEDは，非常に洗練され実験的にもテストされている古典的理論，すなわちマクスウェルの電磁気学を量子化したものである．マクロのスケールでは地球や木星磁場の存在，銀河系磁場の存在により，数万光年つまり 10^{+22} cm まで適用可能である．一方ミクロのスケールではどうであろうか？ 古典電磁気学はミクロのスケールでは限界のあることが量子論設立の大きな要因であったことを考えると，QEDのミクロの方，言い換えれば高エネルギー限界を探ることは意味がある．現在のテストは $e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$ とかバーバー (Bhabha) 散乱(電子と陽電子との弾性散乱) の実験データがQEDとどれだけ合うかでテストできる．通常電子の伝播関数またはヴァーテックス関数のQEDからのズレを，$F=1+s/\Lambda^2$ のようにパラメター化し Λ の値で適用限界を表す．Λ の現在の実験下限値は $\Lambda > 1$ TeV くらいであり[4]，距離に直すと 10^{-17} cm までQEDが正しく適用できることがわかっている．結局最低限39桁にわたるスケール範囲でQEDは正しいことがいえることになる．

参考文献

1) A. de Shaliti *et al.*: *Phys. Rev.*, **107** (1957) 1459
2) Bjorken, Drell: Relativistic Quantum Mechanics, §8.2, §8.4
3) T. Kinoshita: *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981) 1573
Cohen: *Rev. Mod. Phys*. **59** (1987) 1121
4) Particle Data Group: Review of Particle Properties, *Phys. Rev.*, **D54** (1996) 1
5) T. Kinoshita: *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 717

6
対称性と保存則

6.1 連続対称性

自然を律する原理ないしは基本方程式を知らないときは，現象の見せる対称性や保存則がしばしば真理に到達する道しるべとなる．歴史的には，マクスウェルが電荷の保存則を使って変位電流の存在を予測し，電気，磁気，光の統一にたどりついた例があるし，相対論の発見はマクスウェル方程式の対称性，ローレンツ不変性が契機であった．しかし，歴史に現れた対称性は近似的なものが多い．クォークモデルに到達する過程で現れたアイソスピン ($SU(2)$) や，香りの $SU(3)$ はこの例である．これらは本質的な対称ではなく，クォークの質量が小さいことに起因する偶然性の強いものと見なされている．今日厳密に成立すると考えられている保存則はゲージ対称性に基づくもののみである．エネルギー，運動量，角運動量，電荷の保存則などがこの範疇に入る．バリオンやレプトン数の保存則は実験的には成立しているものの，厳密に成り立つとは考えられていない．大統一理論ではバリオンとレプトンの保存則は全面的に破れている．

6.1.1 ネーターの定理

対称性が存在するとそれに対応した保存量が存在する．対称とはある操作を行っても何かが変わらないことを意味するから，この何かを保存量というだけでは単なる言葉の言い換えであるが，上の文章の意味は，対称操作によって運動方程式が不変なとき，時間の経過によって変わらない物理的観測量が存在するということである．古典力学では，対称と保存則の関係はラグランジアンを

使えば次のように表される．オイラーの運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)}{\partial q_i}=0 \tag{6.1}$$

であるから，もしラグランジアン L が座標を含まないとすると座標の平行移動という対称操作を行ってもラグランジアンは不変である．この場合上式第 2 項は零となるから，共役運動量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{6.2}$$

の時間微分は 0，すなわち保存量となる．ラグランジアン形式は一般座標で成り立つのが特徴であり，q がデカルト座標であれば通常の運動量保存則，極座標であれば角運動量の保存則となる．

量子力学では，シュレーディンガー方程式

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}=H\psi \tag{6.3 a}$$

において，時間に陽によらないユニタリー変換 U を考え

$$\psi \longrightarrow \psi'=U\psi \tag{6.4}$$

に対して同じ運動方程式

$$i\frac{\partial \psi'}{\partial t}=H\psi' \tag{6.3 b}$$

が成立するとき，(6.3 b) に左から，U^{-1} を掛けると，

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}=U^{-1}HU\psi \tag{6.3 c}$$

$$\therefore\quad U^{-1}HU=H \quad \text{または} \quad [U, H]=0 \tag{6.5}$$

いま，U を連続パラメター α の正則関数で，$\alpha\rightarrow 0$ の極限で 1 に近づくユニタリー変換とすると，微小量 $\delta\alpha$ に対し

$$U\simeq 1-i\delta\alpha Q \tag{6.6}$$

のように書ける．U のユニタリー性から Q はエルミートとなり，したがって観測量である．(6.5) から Q もまた，ハミルトニアン H と交換するから，Q の期待値の時間微分は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi^* Q\psi \mathrm{d}V=i\int\psi^*[H, Q]\psi \mathrm{d}V=0$$

となり，Q は保存する観測量であることがわかる．

U を座標を平行移動する演算子とすると，

$$x \xrightarrow{U} x' = x + a \tag{6.7}$$

新しい関数は，座標を逆に進めたところでの元の関数と一致するから

$$\psi'(x') = U\psi(x) = \psi(x-a) \tag{6.8}$$

$$= \psi(x) - a\frac{\partial\psi}{\partial x}(x) + \cdots\cdots + \frac{(-a)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\psi(x) + \cdots\cdots$$

$$= \exp\left[-ia\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\psi(x) \equiv \exp[-iap]\psi(x) \tag{6.9}$$

(6.6) と比べて，

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \equiv p \tag{6.10}$$

は時間によって変わらない観測量である．(6.1) に続く議論と比較すれば，(6.10) によって定義された p は古典力学の運動量に対応する演算子であることは明らかである．以上の対称性と保存量の関係を相対論的場に適用すると，

ネーター (Noether) の定理　ある連続な対称操作で運動方程式が不変であるならば，保存カレント（ネーターカレント）が存在する

となる．

証明　運動方程式が不変ということは，ラグランジアンが不変ということであるから，

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\partial_\mu\phi_i\right] = 0 \tag{6.11 a}$$

オイラーの方程式 (4.10) を使って第 1 項を書き直すと，(6.11 a) は

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right] = 0 \tag{6.11 b}$$

と書き直せる．したがって，

$$j^\mu \equiv \sum\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i \tag{6.12}$$

で，定義される 4 元カレントは，連続の方程式

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{6.13}$$

を満たす．この場合，

$$Q = q\int j^0\mathrm{d}^3x \tag{6.14}$$

が保存量となる．なぜなら (6.13) によって

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=q\int\frac{\mathrm{d}j^0}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}^3x=-q\int\nabla\cdot j\mathrm{d}^3x=\text{表面積分}=0 \qquad (6.15)$$

が成立するからである．

演習 6.1 ディラック場のラグランジアン (4.13) は，ディラック場を $\overline{\psi}\psi$ の組み合わせで含むので，次のような位相変換（ゲージ変換）に対して不変である．

$$\psi\longrightarrow \mathrm{e}^{-i\alpha}\psi,\qquad \overline{\psi}\longrightarrow\overline{\psi}\mathrm{e}^{i\alpha} \qquad (6.16)$$

微小変換 $\delta\psi=-i\delta\alpha\psi$, $\delta\overline{\psi}=i\delta\alpha\overline{\psi}$ に対応するネーターカレントが

$$j^\mu=\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \qquad (6.17)$$

であることを示せ．

6.1.2 エネルギー運動量テンソル

ラグランジアンが座標をあらわには含まない場合に，座標の移動や回転を考えると，

$$\delta\phi_i=\delta x^\nu\partial_\nu\phi_i \qquad (6.18\,\mathrm{a})$$

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu\phi_i(x))&=\partial_\mu(\delta x^\nu\partial_\nu\phi_i)\\&=\delta x^\nu(\partial_\mu\partial_\nu\phi_i)+(\partial_\mu\delta x^\nu)\partial_\nu\phi_i\end{aligned} \qquad (6.18\,\mathrm{b})$$

を入れると，ラグランジアンの変化 $\delta\mathcal{L}$ は

$$\delta\mathcal{L}=\sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta x^\nu\partial_\nu\phi_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\{\delta x^\nu(\partial_\nu\partial_\mu\phi_i)+(\partial_\mu\delta x^\nu)\partial_\nu\phi_i\}\right]$$

最初の 2 項を合わせたものは $\delta x^\nu\partial_\nu\mathcal{L}$ に等しいことに注目し，第 3 項については，部分積分をすると，

$$\begin{aligned}\delta S=\delta\int\mathcal{L}\mathrm{d}^4x&=\int\left[\partial_\nu\mathcal{L}-\sum_i\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i\right\}\right]\delta x^\nu\mathrm{d}^4x\\&=\int\mathrm{d}^4x\partial_\mu\left\{\left[g^\mu{}_\nu\mathcal{L}-\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i\right]\right\}\delta x^\nu\end{aligned} \qquad (6.19)$$

$\delta S=0$ が任意の δx^ν について成立するから，エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を

$$T^{\mu\nu}=g^{\nu\rho}T^\mu{}_\rho\equiv\sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial^\nu\phi_i\right]-g^{\mu\nu}\mathcal{L} \qquad (6.20)$$

で定義すると，

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0 \qquad (6.21)$$

$$\therefore \quad P^{\nu} \equiv \int T^{0\nu} \mathrm{d}^3 x \tag{6.22}$$

は保存量である．P^{ν} をエネルギー運動量ベクトルという．

$$T^{00} = \sum \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial^0 \phi_i \right] - g^{00} \mathscr{L} \equiv \sum \pi_i \dot{\phi}_i - \mathscr{L} = \mathscr{H} \tag{6.23}$$

はハミルトニアン密度である．

演習 6.2 §4 で与えた複素場のエネルギー，運動量，電流 (4.44) を，ラグランジアン (4.43) から，(6.22) などを使って導け．

演習 6.3 §4 で与えたディラック場のエネルギー，運動量 (4.78) を，ラグランジアン (4.13) から導け．

6.1.3 角運動量

z 軸回りの回転は，極座標では，z 軸回りの回転角の移動 $\phi \to \phi - \delta\phi$ で表される．したがって，運動量演算子と同じ考察をすれば，回転演算子 R は，

$$R = \exp(-i\delta\phi L_z), \qquad L_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} = -i\boldsymbol{r} \times \nabla|_z \tag{6.24}$$

と表される．$\boldsymbol{L}$ は軌道角運動量演算子であり，次の交換関係を満たす．

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k \tag{6.25}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ijk \text{ が } 123 \text{ の偶置換} \\ -1 & ijk \text{ が } 123 \text{ の奇置換} \\ 0 & ijk \text{ の } 2 \text{ 個以上が同じ場合} \end{cases} \tag{6.26}$$

軌道角運動量は整数値（の $\hbar$ 倍）しかとれない．球面調和関数 $Y_{Lm}(\theta, \phi)$ は，軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ の固有関数で（正確には $\boldsymbol{L}^2 = L_x{}^2 + L_y{}^2 + L_z{}^2$ の固有値が $L(L+1)$），z 成分（L_z の固有値）が m である．

軌道角運動量にスピン $\boldsymbol{s}$ を加えた全角運動量 $\boldsymbol{J}$ もまた (6.25) と同じ交換関係を満たし，整数値のほかに半整数値をもとれることはよく知られている．スピンをもつ場の一般の回転演算子は，回転軸の方向ベクトルを $\boldsymbol{n}$，回転角を θ として

$$R(\boldsymbol{n}, \theta) = \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\theta} \tag{6.27}$$

で表され，角運動量 J，z 成分 $J_z = M$ をもつ状態 $|J, M\rangle$ は，回転により $|J, M'\rangle$ の重ね合わせとなる．すなわち

$$R(\boldsymbol{n},\theta)|J,M\rangle=\sum_{M'}D^J_{M'M}(\boldsymbol{n},\theta)|J,M'\rangle \tag{6.28}$$

$D^J_{M'M}(\boldsymbol{n},\theta)$ は後の散乱振幅の部分波展開のところで詳しく説明する．$2J+1$ 個の $|J,M\rangle$ のセットを多重項というが，素粒子について $J=s$ が成立し多重項をつくるときは，素粒子はスピン s をもつといい，$2s+1$ 個の多重項は同じ素粒子の違う状態と見る．スピンの場合に，この定義のもつ意味は明らかであるが，後にいろいろな対称を拡張導入したときも，その対称が保存するときは，対称操作で移り変われる状態はすべて同一の素粒子の違う状態と見なすのである．言い換えれば，素粒子の統一とは，すべての素粒子を包含するような対称性を見つけることである．

6.2　2体系における回転対称性

a.　部分波展開

素粒子のスピンの決定には2体の散乱がしばしば使われる．回転対称性が成立すれば，角運動量が保存する．そこで，2粒子散乱状態を表す散乱振幅を各角運動量ごとに分けて書く部分波展開がスピンの決定に重要な役割を果たす．粒子がスピンをもたないときの散乱振幅 $f(\theta)$ の部分波展開は，すでに量子力学で学んだ．重心系での散乱断面積を

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=|f(\theta)|^2 \tag{6.29}$$

と書くとき，

$$f(\theta)=(1/2ip)\sum_J(2J+1)[S^J(E)-1]P_J(\theta) \tag{6.30}$$

$S^J(E)$ は，散乱行列の部分波 J に対応する部分行列要素であり，p は運動量 $P_J(\theta)$ は，$\cos\theta$ の J 次のルジャンドル関数である．

スピンのある場合に便利な部分波分解の方法は，Jacob-Wick[1] によって与えられた．このとき，始状態と終状態のスピン状態を特定の z 軸方向成分 $J_z=M$ の代わりに，運動方向の成分つまりヘリシティ h

$$h\equiv\frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{6.31}$$

で指定することにする．ヘリシティは，回転演算で不変であるので，関与する

すべての粒子が一定の決まったヘリシティをもち，全体として角運動量がある特別の値 J をもつ状態を指定することが可能である．ヘリシティの固有値を λ と書くと散乱行列の回転不変性は，

$$\langle J'M';\lambda_3\lambda_4|S|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle=\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\langle\lambda_3\lambda_4|S^J(E)|\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{6.32}$$

と表せる．散乱振幅の部分波展開のエッセンスは，基本的にはこの式に要約されているといってよい．

2体の散乱で通常取り扱うのは，重心系で粒子1が運動量 $\boldsymbol{p}$（極座標で (p,θ,ϕ)），ヘリシティ λ_1，粒子2が運動量 $-\boldsymbol{p}$，ヘリシティ λ_2 をもつ平面波状態

$$|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle$$

である．この状態を角運動量 J, M をもつ部分波状態で展開することが議論の中心となる．そこで，この状態は，z 軸 $(\theta=\phi=0)$ 方向の状態から，まず y 軸回りに θ，次に z 軸回りに ϕ だけ回転して得られることに注目する．

$$|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle=\mathrm{e}^{-iJ_z\phi}\mathrm{e}^{-iJ_y\theta}|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle=R(\theta,\phi)|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{6.33}$$

ただし，Jacob-Wick は，$R(\theta,\phi)$ として

$$R(\theta,\phi)=\mathrm{e}^{-iJ_z\phi}\mathrm{e}^{-iJ_y\theta}\mathrm{e}^{+iJ_z\phi} \tag{6.34}$$

を使ったので，以下はそれに従う．両者の取扱いの差は位相が変わるのみである．平面波状態 (6.33) を部分波で展開すると，ヘリシティは回転で不変なことを使って

$$\begin{aligned}|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle&=\sum_{JM\lambda'_1\lambda'_2}\langle JM;\lambda_1'\lambda_2'|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle|JM;\lambda_1'\lambda_2'\rangle\\&=\sum_{JM}\langle JM;\lambda_1\lambda_2|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle\end{aligned} \tag{6.35}$$

ここで，係数の遷移行列を評価するために，間に回転行列演算子を挿入すると

$$\langle JM;\lambda_1\lambda_2|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle=\langle JM;\lambda_1\lambda_2|R(\theta,\phi)R^{-1}(\theta,\phi)|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{6.36}$$

$$\langle JM;\lambda_1\lambda_2|R(\theta,\phi)=\sum_{M'}D^J_{MM'}(\phi,\theta,-\phi)\langle JM';\lambda_1\lambda_2| \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}D^J_{MM'}(\phi,\theta,-\phi)&=\langle JM;\lambda_1\lambda_2|R(\theta,\phi)|JM'\lambda_1\lambda_2\rangle\\&=\mathrm{e}^{-i(M-M')\phi}d^J_{MM'}(\theta)\end{aligned} \tag{6.38 a}$$

ここに，$d^J_{MM'}(\theta)$ は，

$$d^J_{MM'}(\theta)=\langle JM|\mathrm{e}^{-iJ_y\theta}|JM'\rangle \tag{6.38 b}$$

で，定義される回転行列で，直交規格化条件

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta d^{J}_{MM'}(\theta) d^{J'}_{MM'}(\theta) = \delta_{JJ'}\frac{2}{2J+1} \tag{6.38 c}$$

を満たす．その主な性質は付録 D にのせてある．

(6.33) を使えば，(6.36) は，

$$\begin{aligned}\langle JM;\lambda_1\lambda_2|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle &= \sum_{M'} D^{J}_{MM'}(\phi,\theta,-\phi)\langle JM';\lambda_1\lambda_2|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle \\ &= D^{J}_{M\lambda}(\phi,\theta,-\phi)\langle J\lambda;\lambda_1\lambda_2|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle\end{aligned} \tag{6.39 a}$$

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \tag{6.39 b}$$

となる．第 3 行目に移るときは，$|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle$ では，z 軸と運動方向が一致するので，軌道角運動量の z 成分は寄与しない $(L_z = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{p} = 0)$ こと，すなわち $M' = \lambda$ であることを使った．(6.39) の最後の行列要素は，次の規格条件を利用して決めることができる．

$$\begin{aligned}&\langle J'M';\lambda_1'\lambda_2'|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta_{\lambda_2\lambda_2'} \\ &\langle p\theta'\phi';\lambda_1'\lambda_2'|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle = \delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta_{\lambda_2\lambda_2'}\end{aligned} \tag{6.40}$$

次の恒等式

$$\begin{aligned}1 &= \langle JM;\lambda_1\lambda_2|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle \\ &= \sum_{\mu\nu}\int \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\cos\theta\langle JM;\lambda_1\lambda_2|p\theta\phi;\mu\nu\rangle\langle p\theta\phi;\mu\nu|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle\end{aligned}$$

で，(6.39) と (6.38) を使えば

$$= \frac{4\pi}{2J+1}|\langle J\lambda;\lambda_1\lambda_2|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle|^2 \tag{6.41}$$

(6.39)，(6.41) を (6.35) に入れれば，目的の平面波の部分波展開が得られる．

$$\begin{aligned}|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle &= \sum_{JM}\langle JM;\lambda_1\lambda_2|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle \\ &= \sum_{JM} N_J D^{J}_{M\lambda}(\phi,\theta,-\phi)|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle\end{aligned} \tag{6.42 a}$$

$$|N_J|^2 = \frac{2J+1}{4\pi} \tag{6.42 b}$$

さて，2 体反応

$$A(p_1) + B(p_2) \longrightarrow C(p_3) + D(p_4)$$

では，エネルギー運動量保存則から，運動を重心の運動と重心系の中での相対

運動に分けることができる．重心運動量 $\boldsymbol{P}$ と相対運動量 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2,\qquad \boldsymbol{P}_f=\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4 \tag{6.43 a}$$

$$\boldsymbol{p}_i=\frac{m_2\boldsymbol{p}_1-m_1\boldsymbol{p}_2}{m_1+m_2},\qquad \boldsymbol{p}_f=\frac{m_4\boldsymbol{p}_3-m_3\boldsymbol{p}_4}{m_3+m_4} \tag{6.43 b}$$

と書けるので，相対運動量を極座標 (p, θ, ϕ) で表すことにして，S 行列を書き直すと

$$\begin{aligned}\langle p_3p_4;\lambda_3\lambda_4|S|p_1p_2;\lambda_1\lambda_2\rangle&=(2\pi)^4\delta^4(P_i-P_f)\\&\quad\times(4\pi)^2\sqrt{\frac{s}{p_ip_f}}\langle p_f\theta\phi;\lambda_3\lambda_4|S|p_i\theta_0\phi_0;\lambda_1\lambda_2\rangle\end{aligned} \tag{6.44}$$

ここに，$s=(p_1+p_2)^2\equiv P_i^2$ であり，第 2 行目の因子は，(6.40) の規格条件を採用することに伴ってでてきたものである．これをみるためには，$S=1$ と置き，左辺は

$$\langle p_3p_4|p_1p_2\rangle=(2\pi)^6(16E_1E_2E_3E_4)^{1/2}\delta^3(p_1-p_3)\delta^3(p_2-p_4) \tag{6.45}$$

であることに注目すればよい．ここで平面波による散乱振幅を部分波で展開する．

$$1=\sum_{J,M}|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle\langle JM;\lambda_1\lambda_2| \tag{6.46}$$

を間に挟んで，(6.42) と (6.32) を使えば，

$$\begin{aligned}\langle p_f\theta\phi;\lambda_3\lambda_4|S|p_i\theta_0\phi_0;\lambda_1\lambda_2\rangle&=\sum_{JM}\frac{2J+1}{4\pi}D^{J*}_{M\mu}(\phi,\theta,-\phi)\\&\quad\times\langle\lambda_3\lambda_4|S^J(E)|\lambda_1\lambda_2\rangle D^J_{M\lambda}(\phi_0,\theta_0,-\phi_0)\end{aligned} \tag{6.47 a}$$

$$\lambda=\lambda_1-\lambda_2,\qquad \mu=\lambda_3-\lambda_4 \tag{6.47 b}$$

となる．ここで θ_0 方向を z 軸にとれば $(\theta_0=0)$，$D^J_{M\lambda}(\phi,\theta,-\phi)$ の定義から，

$$D^J_{M\lambda}(\phi_0,0,\phi_0)=\mathrm{e}^{-i(M-\lambda)\phi_0}d^J_{M\lambda}(0)=\delta_{M\lambda} \tag{6.48}$$

であるので，(6.47) は

$$\begin{aligned}&\langle p_f\theta\phi;\lambda_3\lambda_4|S|p_i00;\lambda_1\lambda_2\rangle\\&\quad=\sum_J\frac{2J+1}{4\pi}\langle\lambda_3\lambda_4|S^J(E)|\lambda_1\lambda_2\rangle\mathrm{e}^{i(\lambda-\mu)\phi}d^J_{\lambda\mu}(\theta)\end{aligned} \tag{6.49}$$

となる．ここで，

$$\langle\lambda_3\lambda_4|S^J(E)|\lambda_1\lambda_2\rangle=\delta_{\lambda_1\lambda_3}\delta_{\lambda_2\lambda_4}+i\langle\lambda_3\lambda_4|T^J(E)|\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{6.50}$$

を定義し，(6.44) を重心系の断面積の式 (5.46 a) に入れると，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}|^2 \tag{6.51}$$

$$f_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}=\frac{1}{2p}\sum_J(2J+1)\langle\lambda_3\lambda_4|T^J(E)|\lambda_1\lambda_2\rangle d^J_{\lambda\mu}(\theta)e^{i(\lambda-\mu)\phi} \tag{6.52}$$

が得られる．これが望みの結果であり，スピンがないときの散乱振幅の部分波展開の式 (6.30) の拡張となっている．実際，付録 D を参照して

$$d^J_{00}(\theta)=P_J(\theta) \tag{6.53}$$

を使えば，$\lambda=\mu=0$ のとき (6.52) は (6.30) に一致する．

b. ユニタリー条件

S 行列のユニタリティから

$$SS^\dagger=S^\dagger S=1 \tag{6.54}$$

これを，任意の始状態 $|i\rangle$ と終状態 $|f\rangle$ で挟めば，$\sum_n$ を適当に規格化した中間状態の和として

$$\delta_{if}=\sum_n S_{nf}{}^* S_{ni} \tag{6.55}$$

$S=1+iT$ で定義した T 行列の場合，(6.55) は，

$$i(T_{if}{}^*-T_{fi})=\sum_n T_{nf}{}^* T_{ni} \tag{6.56}$$

となる．ヘリシティ振幅であれば，T (時間反転) 不変性から $S_{fi}=S_{if}$ が成立するので (後述，(6.134))

$$2\,\mathrm{Im}\,T_{fi}=\sum_n T_{nf}{}^* T_{ni} \tag{6.57 a}$$

ここで，前方散乱 ($|i\rangle=|f\rangle$) を考えると，

$$2\,\mathrm{Im}\,T_{ii}=\sum_n |T_{ni}|^2 \tag{6.57 b}$$

右辺は，反応の全断面積に比例し，左辺は前方散乱振幅の虚数部分に比例する．この関係式は一般的で，非弾性散乱があっても成立する．すなわち

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}=k\mathrm{Im}f(\theta=0) \tag{6.58}$$

比例係数 k を求めるため，(5.17) で定義した散乱振幅

$$T_{fi}=-(2\pi)^4\delta^4(P_i-P_f)\mathcal{M}_{fi}$$

を使って f の規格化因子を求める．(5.46 a) と (6.51) を比較して，

$$f_{fi}=\frac{\mathcal{M}_{fi}}{8\pi\sqrt{s}} \tag{6.59}$$

全断面積は (5.45 a) から得られる.

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}=\frac{\sum_f|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2s\lambda(1,m_1{}^2/s,\ m_2{}^2/s)}=\frac{2\mathrm{Im}\mathcal{M}_{ii}}{4\mathrm{p}\sqrt{s}} \tag{6.60}$$

ここで，第2式から3式に移るときに，(6.57 b) と (5.36 a) を使った．最後に (6.59) 式を使って散乱振幅 f で書き直すと望む結果が得られる．

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}=\frac{4\pi}{p}\mathrm{Im}f(\theta=0) \tag{6.61}$$

これを，**光学定理**という．

演習 6.4 エネルギーが低く2体の弾性散乱のみがある場合について，(6.52) を使って

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}=\int \mathrm{d}\Omega\sum_{\lambda_3,\lambda_4}|f_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}|^2$$

を計算し，(6.57) を使って

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}(\lambda_1,\ \lambda_2)=\frac{4\pi}{p}\mathrm{Im}f_{\lambda_1\lambda_2,\lambda_1\lambda_2}(0)$$

を証明せよ．

6.3 不連続対称性

上に扱った対称は，パラメターが連続的であり，微小変換や微分演算が可能であったが，このほかにパリティ変換，粒子と反粒子を入れ換える荷電共役変換，粒子を交換する演算などの不連続な対称操作がある．

6.3.1 パリティ変換

a. 観測量とパリティ

よく鏡映変換ともいわれるが，正確な定義は空間座標すべてを反転する操作 (P) のことである．

$$\boldsymbol{x}\xrightarrow{P}-\boldsymbol{x} \tag{6.62}$$

2回演算すると元に戻るので，$P^2=1$，したがって，対応する演算子を U_{P} とすると，

$$U_{\mathrm{P}}U_{\mathrm{P}}=1,\qquad \therefore\quad U_{\mathrm{P}}=U_{\mathrm{P}}{}^{-1}=U_{\mathrm{P}}{}^{\dagger} \tag{6.63}$$

したがって，パリティ変換演算子は，ユニタリーであると同時にエルミートであり，それ自身観測量である．(6.63) より固有値は ± 1 となる*1)．

運動量 $\boldsymbol{p}$ は，古典的には $m\boldsymbol{v}$ (座標の時間微分)，量子力学では空間微分 $(-i\nabla)$ であるから，パリティ変換により符号を変える．角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ であるから，パリテイは正である (したがって，スピン角運動量のパリティも正)．運動量のようにパリティ変換で符号を変えるベクトルを極性ベクトル (polar vector)，角運動量のように符号を変えないベクトルを軸性ベクトル (axial vector) という．電荷密度 ρ，電流密度 $\boldsymbol{j}$ はそれぞれパリテイが正のスカラー量，負の極性ベクトルであるから，マクスウェルの方程式により，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=q\rho, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}$$

によって，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\longrightarrow\boldsymbol{E}'(-\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\longrightarrow\boldsymbol{B}'(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \tag{6.64}$$

電磁ポテンシャルと電磁場は

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

によって結びついているから，電磁ポテンシャル $A^\mu=(\phi;\boldsymbol{A})$ の変換性は

$$\phi(\boldsymbol{x})\longrightarrow\phi'(-\boldsymbol{x})=\phi(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\longrightarrow\boldsymbol{A}'(-\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{6.65}$$

これから，フォトンは極性ベクトルつまりパリティは負であることがわかる．運動量 $\boldsymbol{p}$ はパリティが負の観測量であるが，そのこと自身はパリティの破れを意味しない．通常は $-\boldsymbol{p}$ も存在するからである．パリティが負であるような観測量が S 行列の展開項に存在すれば，パリティ保存則は破れている．例えば角運動量 $\boldsymbol{J}$ と運動量との内積 $(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{J})=pJ\cos\theta$ はそうした例の一つである．極低温で磁場を掛けると粒子はその方向に偏極するから，磁場の方向を基準にした角分布に $\cos\theta$ 項つまり非対称が存在すれば，それはパリティの破れを示す．またこれはスピンの方向を $\boldsymbol{p}$ を基準にして測るという意味もあるから，散乱後の粒子が運動方向に偏極していれば，つまり縦偏極が存在すれパリ

---

*1) 正確には位相 η だけの不定性があるが，波動関数の位相は任意であるので $\eta=1$ としても不都合はない．不連続対称操作には常にこの位相の任意性が伴うが，以下特に必要がない限り，常に $\eta=1$ ととることにする．

ティは破れている．

b．固有パリティ

ハミルトニアンが距離のみの関数であると，

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(r) \tag{6.66}$$

はパリティ演算で不変であり，$\psi(\boldsymbol{x})$ が解ならば $\psi(-\boldsymbol{x})$ もまた解となる．

$$\psi(-\boldsymbol{x})=U_{\mathrm{P}}\psi(\boldsymbol{x})=\pm\psi(\boldsymbol{x}) \tag{6.67}$$

一般に粒子は固有のパリティをもち，1粒子状態にパリティ演算 P を行うと

$$P|q\rangle=\pm\eta_P|Pq\rangle \tag{6.68}$$

となる．ここで q は状態を指定する量子数で，例えば運動量 $\boldsymbol{p}$ であると，$Pq=-\boldsymbol{p}$ である．η_P はパリティ変換に伴う位相で通常は1にとる．

c．多体系のパリティ

多体系の場合，角運動量や電荷など連続対称操作に伴う保存量は和で，不連続対称操作の保存量は積で表される．

証明　多体系の波動関数 $\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，相互作用がないときは1体の波動関数の積で表される．

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\cdots\cdots\psi_n(x_n) \tag{6.69}$$

$$\Psi'=U\Psi=\psi_1'\psi_2'\cdots\cdots\psi_n'=U\psi_1U\psi_2\cdots\cdots U\psi_n \tag{6.70}$$

連続変換 $U=\exp(iQ)$ の場合は，右辺は

$$\sim\prod\exp(iQ_i)\psi_i=\exp(i(Q_1+Q_2+\cdots))\prod\psi_i$$

であるので

$$Q=Q_1+Q_2+\cdots+Q_n \tag{6.71}$$

不連続変換の場合は，U 自身が固有値 η に変わるから，右辺は $\sim\eta_1\eta_2\cdots\eta_n\psi_1\psi_2\cdots\psi_n$ であるので

$$\eta=\eta_1\eta_2\cdots\eta_n \tag{6.72}$$

これら Q と η をそれぞれ，加算的，乗算的量子数ということもある．

d．2体系のパリティ

粒子1, 2の固有パリティを P_1, P_2 とし，相対運動の固有波動関数 $\Phi(x)=f(r)Y_{Lm}(\theta,\phi)$ とする．ただし，Y_{Lm} は球面調和関数である．空間反転によって $\theta\to\pi-\theta$，$\phi\to\phi+\pi$ となるので，球面調和関数の性質，$Y_{Lm}(\pi-\theta, \phi$

$+\pi)=(-1)^L Y_{Lm}(\theta,\phi)$ を使うと，

$$U\psi(x_1, x_2)=U\{\phi_1(x_1)\Phi(x_1-x_2)\phi_2(x_2)\}=P_1P_2(-1)^L\psi \qquad (6.73)$$

3体系の場合も同様に，粒子1と2の相対軌道角運動量を l，粒子1と2の重心系と粒子3の相対角運動量を L として（図6.1），

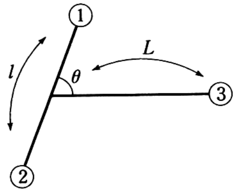


図 6.1 3体系の軌道角運動量
まず①と②の重心系の相対角運動量を l とし（角度は何らかの基準軸から計る）．次にその重心系と③との相対角運動量を L とすると全体の角運動量 $\boldsymbol{J}$ はそのベクトル和となる．$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{L}$

$$P_1P_2P_3(-1)^{L+l} \text{ となる.} \qquad (6.74)$$

いま反応 $a+b \to c+d$ を考えると，

$$\langle cd|H|ab\rangle=\langle cd|P^{-1}PHP^{-1}P|ab\rangle=P_aP_b(-1)^lP_cP_d(-1)^{l'}\langle cd|H|ab\rangle$$

であるから，

$$\{1-P_aP_b(-1)^lP_cP_d(-1)^{l'}\}\langle cd|H|ab\rangle=0 \qquad (6.75)$$

ゆえに，$\langle cd|H|ab\rangle\neq 0$ であれば，

$$P_aP_b(-1)^l=P_cP_d(-1)^{l'} \qquad (6.76)$$

であるので，反応の前後でパリティが保存する．(6.76) を使えば，粒子a, b, cのパリティがわかっているとき粒子dのパリティを決めることができる．ただしこのとき別の選択則があって $\langle cd|H|ab\rangle=0$ であればこの限りでない．したがって選択則の数だけ粒子に付与するパリティに不定性がでる．例えば $\pi^\pm$ のパリティを，$p\to n+\pi^+$ で決めるには陽子pと中性子nの両方のパリティを知らないと決定できないが，陽子と中性子は電荷の保存則で π^+ を介せずに相互転換は不可能であり，陽子と中性子の相対パリティは不定である．通常は相対的に正と定義する．同様にストレンジネスの保存によって $p\to K+\Lambda$ 遷移で Λ 粒子とK中間子は独立にパリティを決めることは不可能で，Λ の陽子に対する相対パリティを正としてKのパリティを決める．ハドロンはクォー

クの複合体という立場にたてば，ハドロンのパリティは励起軌道角運動量がわかれば自動的に決まる．このときはクォーク間の相対パリティの問題となる．

e.　ヘリシティ状態のパリティ変換（*）

全角運動量 J と J_z，ヘリシティを指定した状態 $|JM;\lambda\rangle$ のパリティ変換は，軌道角運動量が表にでていないので，やや複雑な考察を要する．結果にのみ興味のある人は，(6.91) を参照して証明は飛ばしてもよい．(6.33) で定義したヘリシティ状態は，粒子 1 と 2 の波動関数を使って

$$|p\theta\phi;\lambda_1\lambda_2\rangle=\psi_{p\lambda_1}(1)\chi_{p\lambda_2}(2) \tag{6.77}$$

と書ける．粒子 1 は $+z$ 方向に，粒子 2 は $-z$ 方向に運動している．$\psi_{p\lambda}$ は，質量をもつ粒子の場合静止状態 $\psi_{0\lambda}$ から，z 方向にローレンツブーストして得られる．2 体状態の相対位相は，$\psi_{0\lambda}$ が角運動量演算子の慣用の式

$$J^{\pm}|s,\lambda\rangle=(J_x\pm J_y)|s,\lambda\rangle=[(s\mp\lambda)(s\pm\lambda+1)]^{1/2}|s,\lambda\pm 1\rangle \tag{6.78}$$

を満たすという要請により定まる．パリティ演算はスピン方向を変えないから

$$P\psi_{0\lambda}=\eta\psi_{0\lambda} \tag{6.79}$$

η は粒子 1 の固有パリティである．ここで，xz 平面に関する鏡映演算子

$$Y\equiv \mathrm{e}^{-i\pi J_y}P \tag{6.80}$$

を定義しておくと便利である．(6.37)，(D.14) から

$$\mathrm{e}^{-i\pi J_y}\psi_{0\lambda}=\sum_{\lambda'}d^{s}_{\lambda'\lambda}(\pi)\psi_{0\lambda'}=(-1)^{s-\lambda}\psi_{0,-\lambda} \tag{6.81}$$

ここで，ローレンツブーストを掛ける．Y 演算と z 方向のロレンツブーストは交換するから，上式を総合して

$$Y\psi_{p\lambda}=\eta(-1)^{s-\lambda}\psi_{p,-\lambda} \tag{6.82 a}$$

を得る．同様に

$$Y\chi_{p\lambda}=\eta(-1)^{s+\lambda}\chi_{p,-\lambda} \tag{6.82 b}$$

χ の場合，-1 の肩の λ の符号が変わっているのは，χ が $-z$ 方向の運動量をもつためである．結局

$$Y\psi_{p\lambda_1}(1)\chi_{p\lambda_2}(2)=\eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-\lambda_1+\lambda_2}\psi_{p,-\lambda_1}(1)\chi_{p,-\lambda_2}(2) \tag{6.83}$$

したがって，

$$P\psi_{p\lambda_1}(1)\chi_{p\lambda_2}(2)=\eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-\lambda_1+\lambda_2}\mathrm{e}^{i\pi J_y}\psi_{p,-\lambda_1}(1)\chi_{p,-\lambda_2}(2) \tag{6.84}$$

さて，ここで知りたいのは

$$P|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle = e^{i\alpha}|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{6.85}$$

である．パリティ演算と角運動量演算は交換するから，位相 α は M によらない．そこで，一般性を失うことなく $M=\lambda=\lambda_1-\lambda_2$ としてよい．同じ理由で，$\theta=\phi=0$ の場合について考察する．(6.84) より

$$\begin{aligned} P|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle &= \eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-\lambda_1+\lambda_2}e^{i\pi J_y}|p00;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \\ &= \eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-\lambda_1+\lambda_2}|p,-\pi,0;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \end{aligned} \tag{6.86}$$

ここで，この状態を部分波状態で展開し，(6.42) と (D.14) を使えば

$$\begin{aligned} &|p,-\pi,0;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \\ &= \sum_{JM\mu_1\mu_2}|JM;\mu_1\mu_2\rangle\langle JM;\mu_1\mu_2|p,-\pi,0;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \\ &= \sum_J N_J(-1)^{\lambda-J}|J\lambda;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \end{aligned} \tag{6.87}$$

これを，(6.86) に入れて，

$$P|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_J N_J\eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-J}|J\lambda;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \tag{6.88}$$

一方，(6.86) の右辺を直接展開して (6.42) を使えば

$$\begin{aligned} P|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle &= \sum_{JM}P|JM;\lambda_1,\lambda_2\rangle N_J D^J_{M\lambda}(0,0,0) \\ &= \sum_J N_J P|J\lambda;\lambda_1,\lambda_2\rangle \end{aligned} \tag{6.89}$$

(6.88) と (6.89) を比較して

$$P|J\lambda;\lambda_1\lambda_2\rangle = \eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-J}|J\lambda;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \tag{6.90}$$

を得る．s_1+s_2-J は整数であることを使えば

$$P|JM;\lambda_1\lambda_2\rangle = \eta_1\eta_2(-1)^{J-s_1-s_2}|JM;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \tag{6.91}$$

パリティ保存が成立するとき，(6.91) を S 行列に適用して

$$\langle-\lambda_3,-\lambda_4|S^J|-\lambda_1-\lambda_2\rangle = \eta_S\langle\lambda_3\lambda_4|S^J|\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{6.92 a}$$

$$\eta_S = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4(-1)^{s_3+s_4-s_1-s_2} \tag{6.92 b}$$

(6.52)，(D.14) を使えば，散乱振幅について同様な結果

$$\langle-\lambda_3,-\lambda_4|f(\theta,\phi)|-\lambda_1,-\lambda_2\rangle = \eta_S\langle\lambda_3\lambda_4|f(\theta,\pi-\phi)|\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{6.93}$$

を得る．

f．π-中間子のパリティ

π 中間子を重水素 (D) の中に止めて，重水素が二つの中性子 (n) に壊れる反応

$$\pi^- + \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{n} \tag{6.94}$$

を使う．入射 π は止まってから反応するので，反応前の軌道角運動量は 0 である．終状態での軌道角運動量を L とすれば，

$$P_\pi = P_\mathrm{D}(P_\mathrm{n})^2(-1)^L \tag{6.95}$$

重水素は陽子 p と中性子 n の束縛状態で，スピンが 1，相対軌道角運動量 l は，$S(l=0)$ に少し $D(l=2)$ が混じっているとわかっている．これを ${}^3S_3, {}^3D_3$ のように表記する．上の議論によって $P_\mathrm{p}P_\mathrm{n} \equiv +$ であるので，$P_\mathrm{D} = P_\mathrm{p}P_\mathrm{n}(-1)^l = +$ である．(6.95) により，

$$P_\pi = (-1)^L$$

軌道角運動量 L を決めるには角運動量保存則を使う．後で述べるように $\pi^\pm$ のスピンは 0 とわかっている．p, n のスピンは 1/2 であるから，2 個の中性子の合成スピン s は，1 または 0 である．始状態の全角運動量 $J_i = s_\mathrm{D} = 1$ である．終状態の全角運動量 J_f は，$\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{L}$ とのベクトル和であるから，

$$s=0 \quad \text{ならば，} J_i = J_f = 1, \qquad \therefore \quad L=1$$
$$s=1 \quad \text{ならば，} \quad J_f = L-1, L, L+1, \qquad \therefore \quad L=2,1,0$$

しかし，これでは，±両方が可能であるので，パリティを決めるにはもう一つの情報が必要である．終状態は 2 個の中性子，つまり 2 個の同一フェルミオンであるから，波動関数は粒子の入れ換えに対し反対称でなければならない．波動関数はスピン関数と空間波動関数の積であるから，スピン関数が対称（反対称）であるならば，空間波動関数は反対称（対称）である．$s=0\,(1)$ のスピン波動関数は反対称（対称）であるから，L は偶数（奇数）でなければならない．したがって，許されるのは $s=1$, $L=1$ のみとなる．

$$\therefore \quad P_\pi = -1$$

したがって，(6.94) の反応が存在すれば，π のパリティは負と決まるし，逆に π のパリティが正であれば反応は起こらない．この反応は存在するので π のパリティは負である．

g．π^0 のスピンパリティ

π^0 はほぼ 100％ 2 個の γ（スピン 1）に崩壊する．このことから π^0 のスピンが 1 ではありえないことと，π^0 のパリティが決められることを示そう．

π^0 の静止系では，2 個の γ は 180° の正反対方向に放出される．これを z 軸

にとり，z 方向の γ が右旋光偏極 ($s_z=+1$), $-z$ 軸方向の γ が左旋光偏極 ($s_z=+1$) をしてるものを RL と書く．このほかに LR, RR, LL 状態がある (図 6.2)．運動量は z 軸の方向であるから，$L_z\sim(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{p}=0$ であるので，J_z は，フォトンのスピンの z 成分のみを含む．RL, LR 状態は，$J_z=\pm2$ の状態であるので $J\geqq2$ でないと実現できない．RR, LL は $J_z=0$ の状態であるので，$J=1$ と矛盾しないが，もし $J=1$ であるならば，$J=1$ の固有関数 $Y_{1,0}\sim\cos\theta$ と同じ変換性を示さなければならない．これは 180° 回転すると符号を変える．ところで RR と LL を 180° 回転すると粒子 1 と 2 を交換した状態になるが，ボース統計により対称つまり符号は同じであるので矛盾する．したがって，$J=1$ ではありえない．

次に π^0 のスピンを 0 としてパリティ変換をする．運動量は方向を変えるがスピンは変わらないから，R と L が入れ替わるので RR ↔ LL がそれぞれ入れ替わる．したがって，パリティ ± の固有状態は

$$P=\pm1\longleftrightarrow(\mathrm{RR}\pm\mathrm{LL})/\sqrt{2} \tag{6.96}$$

フォトンの偏極ベクトルを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ とすると，

$$R\sim-(\boldsymbol{e}_x+i\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2},\qquad L\sim(\boldsymbol{e}_x-i\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2} \tag{6.97 a}$$

であるので，

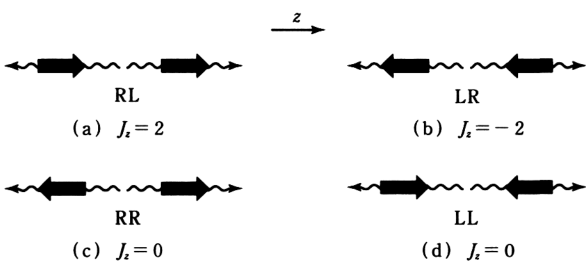


図 6.2 2γ の偏極状態
波の矢印でフォトンの運動量，➡ でスピン方向を示す．(a) RL, (b) LR は $J_z=\pm2$ 状態に対応，(c) RR, (d) LL 状態は $J_z=0$ に対応する．

$$P=\pm1\longleftrightarrow\mathrm{RR}\pm\mathrm{LL}\sim\begin{cases}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x\end{cases} \tag{6.97 b}$$

つまり，$P=+$ ならば，2γ の偏極ベクトルはともに x 方向かともに y 方向であるので平行，$P=-$ であるならば片方が x 方向を向けば他方は y 方向を向

くので2γの偏極ベクトルは直角である．偏極ベクトルの向きは電場の向きであるから，$\gamma \to e^+e^-$により生成される電子陽電子対は偏極ベクトルの向きに放出されやすい．π^0には内部転換 (internal conversion) で，2個のγ中間状態を通して，

$$\pi^0 \longrightarrow (e^+e^-)+(e^+e^-)$$

に崩壊するモード (Dalitz 崩壊) があるので，2組の電子対の角相関を測定すれば，π^0のパリティがわかる．理論計算によれば，電子対のつくる平面のなす角をθとすれば，$P=\pm$に対応して$1\pm A\cos 2\theta$の形となり，実験により$P=-$と定められた[2]．

別の考察　π^0がスピン0つまりスカラー量であるならば，状態は1通りであるから，波動関数もスカラー量であり，空間反転に対する性質はπ^0のパリティを反映してスカラーもしくは凝スカラーとなる．もしπ^0のスピンが1であるならば，状態が3通りあり波動関数はベクトルとなる．フォトンの運動量を$\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}$とし偏極ベクトルを$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$とすると，これからつくれるスカラーとベクトル量は，

$$s=0:\quad (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)f(\boldsymbol{k}^2) \longrightarrow 0^+ \quad :\boldsymbol{e}_1 /\!/ \boldsymbol{e}_2 \tag{6.98 a}$$

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)f(\boldsymbol{k}^2) \longrightarrow 0^- \quad :\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2 \tag{6.98 b}$$

$$s=1:\quad (\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)g(\boldsymbol{k}^2) \tag{6.98 c}$$

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)g(\boldsymbol{k}^2) \tag{6.98 d}$$

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)g(\boldsymbol{k}^2)=\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_1)=0 \tag{6.98 e}$$

ここで，偏極ベクトルは進行方向に直角 ($\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k}=0$)，という事実を使った．$2\gamma$の波動関数はボーズ統計によって対称でなければならないから，粒子$1\leftrightarrow 2$の入れ換え，つまり$\boldsymbol{k}\leftrightarrow -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}_1\leftrightarrow\boldsymbol{e}_2$で符号を変える組み合わせは許されない．すなわち，$s=1$は除外され，許される組み合わせは$s=0$に対応する最上段の2つのみである．波動関数の形からパリティの正負と偏極ベクトルとの相関もつき，はじめの考察と一致していることがわかる．

π^0のスピンが2以上の可能性が除去されたわけではないが，π^0, π^+, π^-の質量がほぼ同じで次章に述べるアイソスピン多重項を形成していて，同じ性質をもつと考えられること，もし$s_{\pi^0}\geqq 2$であると，$\pi^0\to 2\gamma$の角分布が等方性よりずれるはずであるが，実験的にはそのような事実は観測されていないこ

と，高エネルギーで生成される π の数が自由度（つまり $2s+1$）に比例すると期待されるのに，$\pi^{\pm}$ と π^0 で同じであることなどから π^+, π^0, π^- は皆同じスピン 0 とパリティもつと考えてよい*2).

演習 6.5 粒子のスピンとパリティをまとめて J^P のように表す．粒子の崩壊に関して

1) $0 \longrightarrow 0+0$（終状態は 2 個の同一粒子）ならば，始状態の粒子はスカラーである

2) $0^- \longrightarrow 0^+ + \gamma^-$, $0^- + \gamma$ は禁止される

3) $0^- \longrightarrow 0^- + 0^- + 1^-$ は OK

4) $1^- \longrightarrow 0^- + 1^-$ は OK

5) 遅い π^- を重水素に吸収させるとき，

$$\pi^- + \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{n} + \pi^0$$

π^0 が 0^- であるならば，終状態の π^0 は S 波ではありえないことを示せ．

6.3.2 荷電共役変換 (charge conjugation)

a. 観測量と C 変換

荷電共役変換（C 変換）とは，粒子と反粒子とを入れ換える演算のことである．例えば陽子 $\bar{\mathrm{p}}$ を反陽子 $\bar{\mathrm{p}}$ に，π^+ を π^- に変える操作である．そこで例えば

$$\bar{\mathrm{p}} + \mathrm{p} \longrightarrow \pi^+ + \mathrm{X} \quad (\mathrm{X}=\text{anything}) \tag{6.99 a}$$

を考えて，粒子と反粒子と入れ換えてみると

$$\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \longrightarrow \pi^- + \bar{\mathrm{X}} \tag{6.99 b}$$

もし，強い相互作用が荷電共役変換で変わらないとすると，図 6.3 に示すように

1) $$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\pi^+;\theta) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\pi^-;\pi-\theta) \tag{6.100 a}$$

2) $$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\pi^0;\theta) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\pi^0;\pi-\theta) \tag{6.100 b}$$

3) $$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E}(\pi^+) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E}(\pi^-) \tag{6.100 c}$$

---

*2) 現在は u, d クォークとその反粒子 $\bar{\mathrm{u}}$, $\bar{\mathrm{d}}$ より，$\pi^+ \sim -\mathrm{u}\bar{\mathrm{d}}$, $\pi^0 \sim \mathrm{u}\bar{\mathrm{u}} - \mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}$, $\pi^- \sim \mathrm{d}\bar{\mathrm{u}}$ の組み合わせで，軌道角運動量 $l=0$，スピン $s=0$ の状態であるという解釈をとる．したがって，l, s が与えられているときは，全体の角運動量 J とパリティ P, J^P もまた決まる．

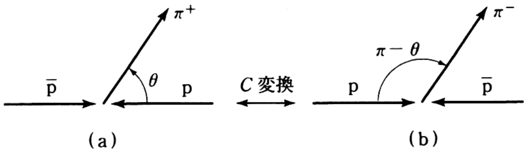


図 6.3　(a)　$\bar{p}+p \longrightarrow \pi^+ + X$
(b)　(a) の荷電共役変換反応 $p+\bar{p} \longrightarrow \pi^- + X$
$d\sigma(\bar{p}+p \longrightarrow \pi^+;\theta) = d\sigma(\bar{p}+p \longrightarrow \pi^-;\pi-\theta)$

といったようなことが導かれる．これらの関係は実験誤差の範囲内で成立している．同様に，電磁相互作用で荷電共役不変性が成立しているかを調べるには，例えば η メソンの電磁崩壊

$$\eta \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$
$$\eta \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma \qquad (6.101)$$

で，π^+ と π^- のエネルギースペクトルが同じかどうかをみればよい．実験では 0.5%以下の精度で等しい[3]．

弱い相互作用では，例えば，

$$\mu^{\mp} \longrightarrow e^{\mp} + \nu + \bar{\nu} \qquad (6.102)$$

を考えよう．もし弱い相互作用が C 変換で不変ならば，電子のヘリシティと陽電子のヘリシティは同じはずである．電子のヘリシティ h は，電子を物質中に通して制動輻射を起こさせ，出てきた γ 線を磁化した鉄に通すと，透過率が γ の偏光で異なることを利用して測れる．実験は，偏光していない静止 μ からの崩壊反応を調べた結果，$h(e^-) \simeq -1$, $h(e^+) \simeq +1$ で[4]，弱い相互作用では，C 不変性が破れていることがわかった．弱い相互作用の P, C の破れについては，第 10 章で詳述する．

b.　場の C 変換

i）ベクトル場の荷電共役変換　第 3 章で記述したように複素スカラー場とディラック場は荷電共役変換で

$$\phi \longrightarrow \eta_C \phi^\dagger, \qquad \psi \longrightarrow \eta_C C \overline{\psi}^{\mathrm{T}} \qquad (6.103)$$

のように変換する．ベクトル場 V^μ もクライン-ゴルドン方程式に従うのでスカラー場と同じように C 変換によって $V^{\dagger\mu}$ となる．

$$V^\mu \longrightarrow V^{\dagger\mu} \qquad (6.104)$$

C 変換によって場がエルミート量に変わるということは，ϕ, V^{μ} が実場であるときは中性粒子を記述するということである．フォトンつまり電磁場は実場の例である．

ただし導き方からわかるように自由場の方程式では位相は決まらない．自由場の方程式のみでは観測もできないから物理的には無意味である．位相を決めるには相互作用を知る必要がある．スカラー粒子およびベクトル粒子のローレンツ不変な相互作用を例えば次のようにとると，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{INT}}=f(\bar{\psi}_1\psi_2\phi+\bar{\psi}_2\psi_1\phi^{\dagger})+g(\bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2V_{\mu}+\bar{\psi}_2\gamma^{\mu}\psi_1V_{\mu}{}^{\dagger}) \quad (6.105)$$

( ) の中の第 2 項は，第 1 項のエルミート共役で，これを付加することにより，ラグランジアンはエルミートになる．C 演算で $\bar{\psi}_1\psi_2 \to \bar{\psi}_2\psi_1$, $\bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2 \to -\bar{\psi}_2\gamma^{\mu}\psi_1$ であるので，$\mathscr{L}_{\mathrm{INT}}$ を不変にするには

$$\phi \longrightarrow \phi^{\dagger}, \qquad V^{\mu} \longrightarrow -V^{\mu\dagger} \quad (6.106)$$

C 演算もパリティ演算と同じく 2 度行うと元に戻る．したがって固有値は ±1 であるので，C パリティという言葉を使うことがある．C 変換により電荷以外の他の量子数（ストレンジネス，バリオン数，レプトン数などの加算的量子数）もすべて符号を変えるので，C の固有状態はこれらすべての量子数が 0 すなわち真の意味で中性である場合に限る．

ii） フォトンの C パリティ フォトン場の方程式は

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}=qj^{\nu} \quad (6.107)$$

である．C 変換により電流は符号を変えるから，A^{ν} もまた符号を変える．上の (6.106) の V^{μ} の変換で V^{μ} を実場と置いても同じように導ける．したがってフォトンの C パリティは負である．また，n 個のフォトンより成る系の C パリティは $(-1)^n$ である．これはスピン，軌道角運動量のいかんにかかわらず成立する．

π^0 や η は，2γ に壊れるから，π^0, η の C パリティは正である．電磁相互作用で C 不変が成立していれば，π^0 や η は 3γ に壊れることはできない．

c. 中性 2 粒子系の C パリティ

粒子とその反粒子より成る系は中性であるから，C の固有状態になりうる．この系の軌道角運動量を L，スピンを s とすると，C パリティは

$$C=(-1)^{L+s} \quad (6.108)$$

で与えられる.

証明 フェルミオン ($\mathrm{f\bar{f}=e^-e^+, p\bar{p}}$ など) の場合

フェルミ統計により粒子の交換で符号を変える. 粒子交換は, 電荷の入れ換え (C), 空間座標の入れ替えとスピン座標の入れ換えの積であるから,

$$-1=C(-1)^L(-1)^{s+1} \tag{6.109}$$

となる. $s=1$ が対称, $s=0$ が反対称なスピン波動関数となることを使った. ボソンの場合も同様に証明できる.

演習 6.6

1) ρ^0 中間子は 1^- のベクトル粒子で, π^+ と π^- に崩壊する. このとき, 2個の π^0 には崩壊できないことを示せ.

2) ポジトロニウムは, 電子と陽電子がクーロン力で結びついた束縛状態である. $L=0$ の基底状態には, $s=0$ と $s=1$ の二つの状態が存在する. $s=0$ からは 2γ, $s=1$ 状態からは 3γ に転換されることを示せ.

3) 反陽子を水素の中で止めて, 反応させるとき, $\mathrm{\bar{p}+p} \to \pi^0+\pi^0$ は禁止されることを示せ.

6.4 時間反転 (T 変換)

6.4.1 量子力学での時間反転

a. スカラー粒子

古典的なニュートン力学の法則

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F \tag{6.110}$$

は, F が時間によらないとき時間の逆転 $t\to -t$ に対して不変であり, ミクロな過程では, 実際に成立していることがわかっている. 時間の含まれる物理量, 例えば速度 ($\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$), 運動量 ($\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$), 角運動量 ($\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$) などは, 時間反転により符号を変える.

ある反応の時間反転とは, 反応の起きる過程を逆行させることである. すなわち, 終状態の粒子の運動量を逆にし, 相互作用の結果, 始状態に逆戻りするような反応である. $\pi\mathrm{p}$ 散乱では例えば, 次のように考えられる.

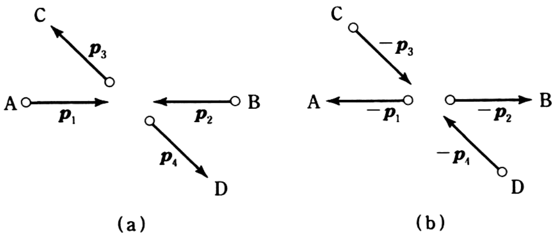


図 6.4 時間反転

(a) 運動量 p_1, p_2 をもつ粒子が入射して，運動量 p_3, p_4 をもつ粒子として出てゆく反応.

(b) 時間反転をした反応は，運動量 $-p_3, -p_4$ をもつ粒子が，入射して運動量 $-p_1, -p_2$ という運動量で出ていくことに対応する.
すなわち，T 変換では，各粒子の運動方向が逆転し，かつ始状態と終状態が入れ替わる.

$$\pi(\boldsymbol{p}_1)+\mathrm{p}(\boldsymbol{p}_2)\longrightarrow \pi(\boldsymbol{p}_3)+\mathrm{p}(\boldsymbol{p}_4) \tag{6.111 a}$$

の時間反転した過程は，

$$\pi(-\boldsymbol{p}_3)+\mathrm{p}(-\boldsymbol{p}_4)\longrightarrow \pi(-\boldsymbol{p}_1)+\mathrm{p}(-\boldsymbol{p}_2) \tag{6.111 b}$$

である (図 6.4). すなわち，位置 ($\boldsymbol{r}$) は変わらず，運動量は逆となり始状態と終状態が入れ替わる．遷移確率の式を表すと

$$\langle T\phi|T\psi\rangle=\langle\psi|\phi\rangle=\langle\phi|\psi\rangle^* \tag{6.112}$$

を示唆する．つまり，T 演算は通常のユニタリー演算のほかに複素共役をとる演算を含むようにみえる．この式が妥当か，量子力学の範囲で議論してみよう．

b. スカラー粒子の時間反転

シュレーディンガー方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \tag{6.113}$$

で時間反転：

$$t\longrightarrow t'=-t, \qquad \psi(t)\longrightarrow\psi'(t')=T\psi(t) \tag{6.114}$$

をすると

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t'}=H'\psi' \quad ただし \quad H'=THT^{-1} \tag{6.115}$$

これが元と同じ方程式 (6.113) を満たすためには，$THT^{-1}=H$ を要求するだ

けでは不十分であるが，(6.115)の両辺の複素共役をとれば成立する．これを，ウィグナー (Wigner) の時間反転という．すなわち，(6.112)は量子力学で時間反転不変性が成立するための必要条件である．時間反転演算によって，波動関数は

$$\psi(t) \xrightarrow{T} \psi'(t') = T\psi(t) = \psi^*(-t) \tag{6.116}$$

となる．$\psi(t)$ が，運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ平面波を表すとき，(6.116) の変換によって

$$\psi(\boldsymbol{x}, t : \boldsymbol{p}) \sim \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - iEt} \xrightarrow{T} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - iEt} = \psi(\boldsymbol{x}, t : -\boldsymbol{p}) \tag{6.117}$$

となって，期待したように運動量 $-\boldsymbol{p}$ をもつ平面波になった．一般に

$$\psi(t) = a\phi_1(t) + b\phi_2(t)$$

であったとすると，

$$\begin{aligned}\psi(t) \longrightarrow \psi' = \psi^*(-t) = a^*\phi_1{}^*(-t) + b^*\phi_2{}^*(-t) = a^*\phi_1{}' + b^*\phi_2{}' \\ \neq a\phi_1{}' + b\phi_2{}'\end{aligned} \tag{6.118}$$

のように変換される．このような変換を反ユニタリー変換という．これは T 演算がユニタリー変換 U と複素共役をとる変換 K の積で表されることを意味し，T 変換で不変とは，(6.112) を意味する．観測量は振幅の 2 乗に比例するからこうしても不都合は起こらない．

実際，こうした複素共役をとるという演算が，首尾一貫した無矛盾の論理を構成することは，いろいろな例で示せる．例えば，運動量が T 変換で符号を変えることは古典的には自明であるが，量子力学では，$\boldsymbol{p} = -i\nabla$ であって時間変換で符号を変えるかどうかは自明ではない．複素共役量をとることによって符号が変わることが保証されている．また，量子条件

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{6.119 a}$$

や角運動量の交換関係

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k \tag{6.119 b}$$

も $p \to -p$, $L \to -L$ とした上で，c 数の複素共役をとることにより不変となる．結局 T 変換に際しては，時間を反転した上で”すべての c 数の複素共役をとる”という約束が必要である．

演習 6.7 以下の変換性を導け．
電場：$\boldsymbol{E}(t) \longrightarrow \boldsymbol{E}'(-t)=\boldsymbol{E}(t)$,　　磁場：$\boldsymbol{B}(t) \longrightarrow \boldsymbol{B}'(-t)=-\boldsymbol{B}(t)$
ポテンシャル：$A^\mu(t) \longrightarrow A'^\mu(-t)=(\phi'(-t);\boldsymbol{A}'(-t))=(\phi(t);-\boldsymbol{A}(t))=A_\mu(t)$
(6.120)

c. ディラック粒子

ディラック方程式はスピンを含むので，ψ の成分間の入れ替えが生じる．したがって

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi'(\boldsymbol{x}, t')=B\psi^*(\boldsymbol{x}, -t) \tag{6.121}$$

となるような変換が存在して元と同じディラック方程式を満たすかを探ればよい．ここで B は 4×4 の c 数行列である．そこで

$$[\gamma^\mu i\partial_\mu - m]\psi(\boldsymbol{x}, t)=0 \tag{6.122}$$

で $t \to t'=-t$ とし，複素共役をとり左から B を掛けると

$$[\gamma^{0*}(-i)(-\partial_0)+\boldsymbol{\gamma}^*\cdot(-i\nabla)-m]\psi^*(\boldsymbol{x}, -t)=0 \tag{6.123}$$
$$[B\gamma^{0*}B^{-1}(-i)(-\partial_0)+B\boldsymbol{\gamma}^*B^{-1}\cdot(-i\nabla)-m]B\psi^*(\boldsymbol{x}, -t)=0$$

したがって

$$B\gamma^{0*}B^{-1}=\gamma^0, \qquad B\gamma^{k*}B^{-1}=-\gamma^k \tag{6.124}$$

なる B が存在すれば，元と同じ方程式を満たし，T 変換に対する不変性がいえる．

$\gamma^{2*}=-\gamma^2$,　$\gamma^{\mu*}=\gamma^\mu$ $(\mu\neq2)$ より，推察して，

$$B=\gamma^3\gamma^1=-i\Sigma_2=\begin{bmatrix} -i\sigma_2, & 0 \\ 0, & -i\sigma_2 \end{bmatrix} \tag{6.125}$$

ととればよい．このとき

$$\psi'(t')=B\psi^*(-t) \qquad =\gamma^3\gamma^1\psi^*(\boldsymbol{x}, -t) \tag{6.126 a}$$
$$\bar{\psi}'(t')=\bar{\psi}^*(\boldsymbol{x}, -t)B^{-1}=\bar{\psi}^*(\boldsymbol{x}, -t)\gamma^1\gamma^3 \tag{6.126 b}$$

d. 部分波の T 変換

スピン角運動量 ($\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\sigma}/2$) は古典的対応がないので，$T$ 反転でどう変化するかはわからないが，軌道角運動量と同じ変換をすると仮定すれば，全角運動量 $\boldsymbol{J}$ もまた T 変換で符号を変える．したがって

$$J_z T|JM\rangle=-TJ_z|JM\rangle=-MT|JM\rangle \tag{6.127 a}$$

であるので，

$$T|JM\rangle=\eta(J,M)|J,-M\rangle \tag{6.127 b}$$

ここに η は位相因子である．この位相因子を決めるために，角運動量演算の慣用の関係式

$$J^{\pm}|JM\rangle=(J_x\pm iJ_y)|JM\rangle=[(J\mp M)(J\pm M+1)]^{1/2}|J,M\pm 1\rangle \tag{6.128}$$

を使う．

$$\begin{aligned}TJ^{-}|JM\rangle&=[(J+M)(J-M+1)]^{1/2}T|J,M-1\rangle\\&=[(J+M)(J-M+1)]^{1/2}\eta(J,M-1)|J,-M+1\rangle\end{aligned} \tag{6.129 a}$$

であるが，演算の順序を逆にすれば

$$\begin{aligned}TJ^{-}|JM\rangle&=-J^{+}T|JM\rangle=-\eta(J,M)J^{+}|J,-M\rangle\\&=-\eta(J,M)[(J+M)(J-M+1)]^{1/2}|J,-M+1\rangle\end{aligned} \tag{6.129 b}$$

したがって

$$\eta(J,M)=-\eta(J,M-1) \tag{6.130}$$

が成り立ち，これは

$$\eta(J,M)=\eta(J)(-1)^{-M} \tag{6.131 a}$$

を意味する．$\eta(J)$ は M によらない位相因子であり，S 行列の回転不変性，T 変換の反ユニタリー性を考慮すれば，適当に決められる因子である．

$$\eta(J)=(-1)^{J} \tag{6.131 b}$$

を採用すれば[*3]，

$$T|JM\rangle=(-1)^{J-M}|J,-M\rangle$$

角運動量，ヘリシティ固有状態の T 変換も同様にして

$$T|JM;\lambda\rangle=(-1)^{J-M}|J,-M;\lambda\rangle \tag{6.132}$$

がいえる[1]．この証明には，1粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$，ヘリシティ λ をもつ状態 $|\boldsymbol{p}\lambda\rangle$ の T 変換状態は，$\eta|-\boldsymbol{p}\lambda\rangle$ であり，y 軸回りの 180 度回転と同等であることを使う．

$$T|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle=\varepsilon e^{-i\pi J_y}|p00;\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{6.133}$$

ε は位相因子である．この後の議論はパリティ変換式を導いたときと同じ論法を使えばよい．

[*3] 通常使用する $Y_{L,M}$ は，$\eta(J)=1$ で定義されている．ここの規則に合わせようとすれば，$Y_{L,M}\to(i)^{L}Y_{L,M}$ としなければいけないが，本書ではこの差が問題になることはない．

演習 6.8 ヘリシティ固有関数 $\chi_\pm$ (3.17) について (6.125) を参照すれば，$\chi_\pm$ の T 変換は

$$T\chi_\pm = -i\sigma_2\chi^*{}_\pm = (-1)^{s-M}\chi_\mp$$

となることを示せ．

最後に，ヘリシティ散乱振幅については，S 行列の T 変換における反ユニタリー性と (6.132) を使えば，

$$\langle\lambda_3\lambda_4|S^J|\lambda_1\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1\lambda_2|S^J|\lambda_3\lambda_4\rangle \tag{6.134}$$

がいえる．

6.4.2 場の演算子の T 反転

a. スカラー場

スカラー場の演算子 ϕ は T 変換によって，

$$\phi(x, t) \longrightarrow T\phi T^{-1} = \phi'(\boldsymbol{x}, -t) \tag{6.135}$$

とする．運動方程式は

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0 \tag{6.136}$$

であるので，位相因子は別として

$$\phi' = \phi \quad \text{または} \quad \phi' = \phi^\dagger \tag{6.137}$$

のどちらを選択しても満たされている．しかし，ここで波動関数（ψ と書く．c 数とする）に関して，先の量子力学での規則が適用されるという条件を課そう．ϕ を平面波展開すると

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \sum\{a(k)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-iEt} + b^\dagger(k)\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+iEt}\} \tag{6.138}$$

であるので，運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ c 数の波動関数は

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \langle 0|\phi(\boldsymbol{x}, t)|p\rangle \tag{6.139 a}$$

によって，量子化された場 ϕ から抽出できる．同様に T 変換された波動関数は

$$\psi'(\boldsymbol{x}, -t) = \langle T0|\phi(\boldsymbol{x}, t)|Tp\rangle \tag{6.139 b}$$

によって抽出されるはずである．ところで，c 数の波動関数の T 変換式 (6.116) と，条件 (6.112) を使うと

$$\begin{aligned}\psi'(\boldsymbol{x}, t') &= \psi(\boldsymbol{x}, -t)^* = \langle 0|\phi(\boldsymbol{x}, -t)|p\rangle^* = \langle T0|T\phi(\boldsymbol{x}, -t)p\rangle \\ &= \langle T0|T\phi(\boldsymbol{x}, -t)T^{-1}|Tp\rangle\end{aligned} \tag{6.139 c}$$

(6.139 b) と (6.139 c) を比べれば,

$$T\phi(\boldsymbol{x},t)T^{-1}=\phi(\boldsymbol{x},-t) \tag{6.140}$$

であればよい. ただし, この T 演算は c 数について複素共役をとる演算を含む[*4].

ϕ の展開式から, 生成消滅演算子の時間反転での変換は,

$$a(k)\longrightarrow a(-k), \qquad b^\dagger(k)\longrightarrow b^\dagger(-k) \tag{6.141}$$

であることがわかる. これは $|k\rangle=a^\dagger(k)|0\rangle\to a^\dagger(-k)|0\rangle=|-k\rangle$ とあっている.

スカラー場のカレントの時間反転は

$$j^\mu=iq(\phi^*\partial^\mu\phi-\partial^\mu\phi^*\phi)$$

で時間を反転し, $i\to -i$ とするので,

$$j^0(\boldsymbol{x},t)\longrightarrow j^0(\boldsymbol{x},-t), \qquad j^k\longrightarrow -j^k(\boldsymbol{x},-t) \tag{6.142 a}$$

したがって

$$j^\mu \xrightarrow{T} j_\mu(\boldsymbol{x},-t) \tag{6.142 b}$$

ベクトル場は (4.15 a) のプロカの方程式に従うから

$$\partial_\mu f^{\mu\nu}+m^2B^\nu=j^\nu \tag{6.143}$$

から, (6.142) と整合するためには

$$B^\mu \xrightarrow{T} B_\mu(\boldsymbol{x},-t) \tag{6.144}$$

b. ディラック場

$$\psi(x)\xrightarrow{T}\psi'(\boldsymbol{x},t')=T\psi(\boldsymbol{x},t)T^{-1}=B\psi(\boldsymbol{x},-t) \tag{6.145 a}$$

となるような変換が存在して元と同じディラック方程式を満たすかを探ればよい. 明らかに量子力学のディラック粒子波動関数の変換性を導いたときと同じ議論ができるから, B は (6.125) で与えられる.

$$\psi'(t')=T\psi T^{-1}=B\psi(-t)=\gamma^3\gamma^1\psi(\boldsymbol{x},-t) \tag{6.145 b}$$

$$\overline{\psi}'(t')=T\overline{\psi}T^{-1}=\overline{\psi}(\boldsymbol{x},-t)B^{-1}=\overline{\psi}(\boldsymbol{x},-t)\gamma^1\gamma^3 \tag{6.145 c}$$

上の表現から

---

*4) 実はエルミート共役をとる時間反転 : $\phi(\boldsymbol{x},t)\to\phi^\dagger(\boldsymbol{x},-t)$ の方法も存在するが, この本では触れない.

$$B^{\dagger}=B^{-1}=-B=-\gamma^5 C \tag{6.146}$$

$$B\gamma^{\mu *}B^{-1}=\gamma_{\mu} \tag{6.147}$$

したがって，この変換でベクトルカレントは，

$$\bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2 \longrightarrow \bar{\psi}_1'(-t)\gamma^{\mu *}\psi_2'(-t)=\bar{\psi}_1 B^{-1}\gamma^{\mu *}B\psi_2=\bar{\psi}_1\gamma_{\mu}\psi_2 \tag{6.148}$$

となるから，(6.105) の相互作用もまた

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi V_{\mu} \longrightarrow \bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi V^{\mu} \tag{6.149}$$

となって，T 不変である．

種々のローレンツ量の T 変換性は，付録 E にまとめておいた．

6.4.3 T 変換の応用

a. 詳細均合の原理 (principle of detailed balance)

ある始状態 i から終状態 f へ散乱される過程と $f\to i$ の逆過程は (6.134) で結びついている．反応 A+B → C+D の断面積は，A, B が偏極していなければ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(AB\to CD)=\frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)}\sum_{\lambda}|f_{\lambda_C\lambda_D,\lambda_A\lambda_B}|^2 \tag{6.150 a}$$

他方，反応 C+D → A+B の断面積は，C, D が偏極していなければ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(CD\to AB)=\frac{1}{(2s_C+1)(2s_D+1)}\sum_{\lambda}|f_{\lambda_A\lambda_B,\lambda_C\lambda_D}|^2 \tag{6.150 b}$$

S 行列の T 不変性の式 (6.134) と散乱行列の部分波展開の式 (6.52) は，

$$(p_{AB})^2\sum_{\lambda}|f_{\lambda_C\lambda_D,\lambda_A\lambda_B}|^2=(p_{CD})^2\sum_{\lambda}|f_{\lambda_A\lambda_B,\lambda_C\lambda_D}|^2 \tag{6.151}$$

を意味するから，結局

$$\frac{d\sigma(AB\to CD)}{d\sigma(CD\to AB)}=\frac{(p_{CD})^2(2s_C+1)(2s_D+1)}{(p_{AB})^2(2s_A+1)(2s_B+1)} \tag{6.152}$$

が成立する．ただし，p_{AB}, p_{CD} はそれぞれの系での運動量である．これを詳細均合の原理という．

反応 ($p+{}^{27}Al \leftrightarrow d+{}^{24}Mg$) に適用して，強い相互作用における時間反転のテストをした例を図 6.5 に示す[5]．このデータは，強い相互作用では T 不変性がよく成立していることを示す．

b. π^+ のスピンの決定

π^+ を重水素に当てる反応

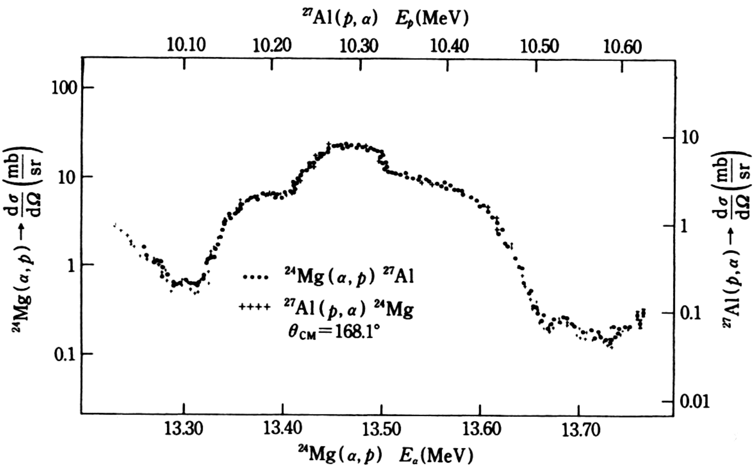


図 6.5 強い相互作用反応 ($d+{}^{24}Mg \leftrightarrow p+{}^{27}Al$) における詳細均合原理 (時間反転不変) の実験検証例[5]

$$\pi^+ + D \longrightarrow p + p \tag{6.153 a}$$

と逆反応

$$p + p \longrightarrow \pi^+ + D \tag{6.153 b}$$

を使う．π, D, p のスピンを s, s_D, s_p とし，πD 系の運動量を k，pp 系の運動量を p として，(6.152) を使えば

$$\frac{d\sigma(pp \to \pi D)}{d\sigma(\pi D \to pp)} = 2\frac{k^2}{p^2}\frac{(2s+1)(2s_D+1)}{(2s_p+1)^2} = \frac{3}{2}\frac{k^2}{p^2}(2s+1) \tag{6.154}$$

ここで，式の前にある因子 2 は，反応 (6.153 a) の終状態に同一粒子が 2 個あることの補正因子である．最後の等式を導くときに，D のスピンが 1，陽子のスピンが 1/2 であることを使った．この式から，π のスピンが 0 と 1 では，断面積比に 3 倍もの差が出るから，容易に実験で決めうる．

$\sigma(pp \to \pi D) = 4.5 \pm 0.8$ mb，$T_p = 340$ MeV，or $T_\pi = 21.4$ MeV[6] で，これから予想される $\sigma(\pi D \to pp)$ は，$s=0$ ならば 3.0 ± 1.0，$s=1$ ならば 1.0 ± 0.3 mb であるのに対し，実験では $\sigma = 3.1 \pm 0.3$ mb，$T_\pi = 25$ MeV であった[7]．よって π 中間子のスピンは 0 と決められた．

c. 中性子の電気双極子

電気双極子の定義は，古典的には

$$\boldsymbol{d}=\int\rho(r)\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3r \tag{6.155}$$

であり，粒子内部の電荷分布に偏りがあると生じる．素粒子のもつ性質の中で方向をもつものはスピン $\boldsymbol{\sigma}$ のみであるから，粒子が電気双極子 $\boldsymbol{d}$ をもつとすればそれは $\boldsymbol{\sigma}$ に比例しなければならない．$\boldsymbol{\sigma}$ の P, T 変換性はそれぞれ $+$, $-$ であるのに反し，$\boldsymbol{d}$ は (6.155) から直ちにわかるように $-, +$ であるので，電気双極子が存在すれば P, T 両方の不変性を破ることになる．

磁気双極子および電気双極子による相互作用ハミルトニアンが

$$H=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E} \tag{6.156}$$

で与えられるとき，スピン 1/2 をもつ粒子に対して，磁気量子数 $m=\pm1/2$ に応じてレベルが分化するから，高周波 (RF ; radio frequency) 電磁波を入射すれば

$$\varDelta E=2\mu B\pm2dE=h(\nu_L\pm\varDelta\nu) \tag{6.157}$$

に対応する周波数で共鳴が起きることになる．ここに ± は電場と磁場が平行と反平行の状態に対応する．したがって，電場を掛けたときに生じる共鳴周波数 ν_L（ラーモア周波数）からのずれ $\varDelta\nu$ から，電気双極子の大きさを決めることができる．実験的に注意しなければならないのは電場と磁場を完全に平行にすることである．もし電場に垂直成分 $\boldsymbol{E}_\perp$ があると，速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている系には $\gamma\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_\perp$ の磁場が現れて偽信号の原因となる．

実験に使用する中性子は例えば温度0.002 °K くらいの超冷却中性子 (ultra-cold-neutron, エネルギー～2×10^{-7} eV, 速度 6 $\mathrm{ms^{-1}}$ くらい) である．ド・ブローイ波長が非常に長く ($\lambda\sim670$ Å)，物質と可干渉的に反応するので，光と同じく屈折率 n が定義できる．

$$n=\left[1-\frac{\lambda^2Na_{\mathrm{coh}}}{\pi}\pm\frac{\mu B}{(1/2)Mv^2}\right]^{1/2} \tag{6.158}$$

ここに，N は単位体積当たりの原子核数，a_{coh} はコヒーレント (coherent＝可干渉) な前方散乱振幅，$(1/2)Mv^2$ は中性子の運動エネルギーである．実際に数値を入れて計算すると $v\sim80\,\mathrm{ms^{-1}}$ では，全反射のための入射角は～5° くらいであるが，$v<6\,\mathrm{ms^{-1}}$ では 90° を越すので常に全反射する．すなわち，十分遅い中性子は曲がった管を通して輸送することができるし，また閉じた容器の中に捉え長時間閉じ込めておくことができる（“磁気瓶＝magnetic bottle”ま

たは“中性子瓶”という). またスピン状態により屈折率が違うので適当な物質を選べば, スピンの一方の状態は全反射させ他方は通過させることが可能である.

図 6.6 (a) にグルノーブルグループの実験装置を示す[8]. 原子炉で発生した熱中性子を液体重水素を通して減速し, 曲がったニッケルパイプ, 全反射する羽を付けたタービンを通してさらに減速した後, 図の装置の入り口に導く. 装置の中ではまず磁化した 1 μm の鉄コバルト箔によって全反射の原理で中性子を偏極させ, 右方の中性子瓶の中へシャッターを開けて取り込む. 中性子瓶は 2 枚の 25 cmϕ のベリリウム電極板を 10 cm 長の円筒の両端にセットしたもので, 外側にはコイルが巻いてあり, ビームに平行に磁場と電場が掛けられるようになっている. 外側には浮遊磁場を遮蔽するために多層のミューメタルを巻いてある. この中性子瓶は, $v<6\,\mathrm{cms}^{-1}$ の中性子を 100 秒以上蓄えられるようになっていて, このとき磁場に垂直に交流磁場 ($B\sim1\,\mu$T のときは共鳴周波数～30 Hz) を掛けて, スピンを反転させた後, シャッターを開いて中性子を外に出し検出器で数を数える. このとき先ほどの鉄コバルト箔を再び通すが, 今度は偏極度の解析器として動作する. 図 6.6 (b) に磁気共鳴曲線を描いてあるが, 図中にある 4 点で測定をし, 電場を掛けたときのズレを検出することによって電気双極子を測る. 実験結果は否定的であり, それまでの世界平均をとって,

$$d_{\mathrm{n}}=-(3\pm5)\times10^{-26}\,\mathrm{e\cdot cm} \qquad (6.159\,\mathrm{a})$$

または上限値として

$$d_{\mathrm{n}}<12\times10^{-26}\,\mathrm{e\cdot cm} \qquad 95\%\text{信頼値} \qquad (6.159\,\mathrm{b})$$

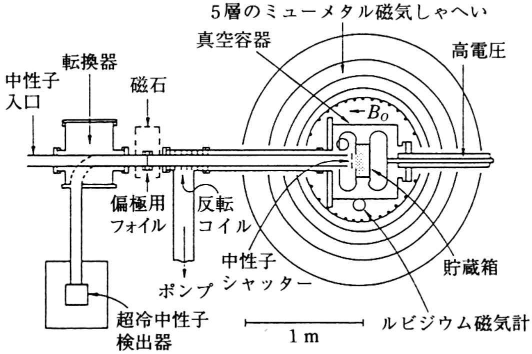
を出した. レニングラードグループも同様な結果

$$d_{\mathrm{n}}<11\times10^{-26}\,\mathrm{e\cdot cm} \qquad 95\%\text{信頼値} \qquad (6.159\,\mathrm{c})$$

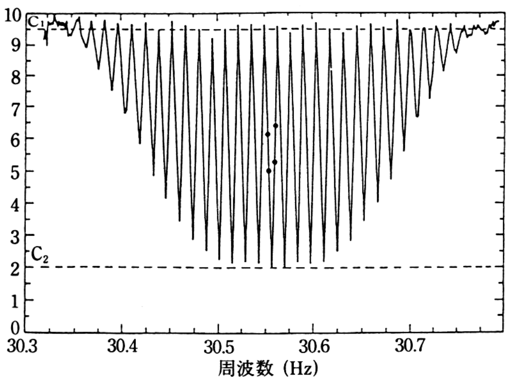
を出している[9].

これはどのくらいの感度に相当するか？　中性子は π 中間子のコンプトン波長～10^{-13} cm くらいに広がっているから強い相互作用が最高度に T を破っているとすれば 10^{-13} e・cm くらいが一つの目安であろう. T の破れが弱い相互作用によるものとすれば W 粒子を放出再吸収する効果の相対値は～$(g_{\mathrm{W}}^2/m_{\mathrm{W}}^2)/(g_{\mathrm{s}}^2/m_\pi^2)$ 程度であろう. ここに $g_{\mathrm{W}}, g_{\mathrm{s}}$ はそれぞれ弱, 強相互作用の強さ

である．統一理論の精神に従って，$g_W \sim g_S$ とすれば弱相互作用で生じる電気双極子の強さは $10^{-13} \times (m_\pi/m_W)^2 \sim 10^{-19}$ e・cm 程度と期待できる．実験値はそれより 6 桁も小さいから中性子の電気双極子は非常に感度のよい T 保存テスト対象といえる．現在，小林-益川理論を使う標準理論での期待値は $1.5 \times 10^{-32\pm1}$ e・cm であるから[10]，電気双極子の見つかる可能性は小さいが，実験値のすぐ下の値（$\sim 10^{-26\pm1}$ e・cm）を予言する理論もあり[11]，実験の改良が望まれ



(a)



(b)

図 6.6　中性子電気双極子能率の測定実験[8]

(a)　実験装置；ランジュバン研究所の装置
超冷中性子は磁場 1 μT，電場 1 MV/m の真空容器の中に約 70 秒間貯蔵される．

(b)　中性子磁気共鳴曲線．70 秒間貯蔵された偏極中性子は，線幅 7 mHz の曲線を示す．データは中央の 4 点でとった．互いの間隔は線幅の 1/10 ほどである．

る.

演習 6.9　$\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2\times\boldsymbol{p}_3$ は時間反転により符号を変える観測量である. これを使って, β 崩壊や $K^0\to\pi^{\mp}+\mu^{\pm}+\nu$ 反応で T 保存のテスト実験を考案せよ[12].

6.5　CPT 定理

C, P, T の変換をすべて組み合わせると, CPT 変換となる. この場合すべての座標を反転させるが $[(\boldsymbol{x},t)\to(-\boldsymbol{x},-t)]$, T 変換を含むのでやはり反ユニタリーであり, 遷移要素など, c 数は複素数をとる必要がある. CPT 変換演算子を Θ と書き演算の要素をまとめると

$$(\boldsymbol{x},t)\xrightarrow{CPT}(-\boldsymbol{x},-t) \tag{6.160 a}$$

$$c\text{ 数}\longrightarrow(c\text{ 数})^* \tag{6.160 b}$$

$$\langle\text{out}|H|\text{in}\rangle\longrightarrow\langle\Theta\text{in}|H|\Theta\text{out}\rangle \tag{6.160 c}$$

$$\Theta|q,\boldsymbol{p},\sigma\rangle\longrightarrow\langle\bar{q},\boldsymbol{p},-\sigma| \tag{6.160 d}$$

デイラックスピノールは

$$\psi(\boldsymbol{x},t)\xrightarrow{C}C\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)=i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)\xrightarrow{P}i\gamma^2\gamma^0\gamma^{0\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{x},t)$$

$$\xrightarrow{T}i\gamma^2\gamma^0\gamma^{0\mathrm{T}}[\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},-t)\gamma^1\gamma^3]^{\mathrm{T}}=\gamma^0\gamma^5\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{x},-t)\equiv D\bar{\psi}^{\mathrm{T}} \tag{6.161 a}$$

同様に

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\xrightarrow{CPT}-\psi^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{x},-t)D^{-1} \tag{6.161 b}$$

CPT の演算する順序により位相は変わるが, D 行列は同じである. この D は

$$D^\dagger=D^{-1},\quad D^{\mathrm{T}}=-D,\quad D\gamma^\mu D^{-1}=\gamma_\mu \tag{6.162}$$

という性質をもつ. これから場の双 1 次形式の変換性を求めると

$$\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2\xrightarrow{CPT}=\begin{cases}\bar{\psi}_2\Gamma\psi_1 & (\Gamma=S,P,T)\\ -\bar{\psi}_2\Gamma\psi_1 & (\Gamma=V,A)\end{cases} \tag{6.163}$$

は CPT の演算順序によらない. ここでエルミート共役をとると, 座標は別と

して符号以外はすべての量が元に戻ることがわかる．ディラック場からつくる合成量でない（凝）スカラー場，（軸性）ベクトル場についても同じ変換性が得られる．これから任意の場の量の組み合わせでできているスカラー量または2階のテンソル量は，（CPT＋エルミート共役）の演算で元に戻ることがいえる．したがってラグランジアン密度（スカラー量），ハミルトニアン密度（2階のテンソル量）の CPT 変換性は

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, t) \xrightarrow{CPT} \mathcal{L}^{\dagger}(-\boldsymbol{x}, -t)$$

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{x}, t) \longrightarrow \mathcal{H}^{\dagger}(-\boldsymbol{x}, -t) \tag{6.164}$$

である．$\mathcal{L}, \mathcal{H}$ はともにエルミート量であり，作用積分は $\mathcal{L}$ を全時空で積分したものであるから，結局運動方程式は CPT 変換で不変である．ハミルトニアンは $H=\int\mathcal{H}(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}^3x$ であるので，t のみ符号を変えるが，H は保存量であり時間によらないから結局元と同じであり，したがって S 行列もまた同じで，すべての運動方程式は CPT 不変である．CPT 不変性は場の量子論の枠内では基本的な定理であり，スピンと統計の関係，裸ラグランジアンのエルミート性（言い換えれば S 行列のユニタリー性），ローレンツ不変性，局所性（微分の階数が有限）程度の緩い仮定のみから導けるので，非常に一般性のある定理である．実験的にも CPT は非常に良い精度で成立している（第11章；K 中間子と CP の破れ参照）．

CPT 定理の予言をいくつか挙げておこう．

（i） 粒子と反粒子の質量は等しい．

証明　H を質量を与える CPT 不変な全ハミルトニアンとする．CPT 演算を Θ で表し，q で，粒子 q の静止状態，スピンの向きを σ_z の状態を表すと

$$\begin{aligned} M_q &= \langle q, \sigma|H|q, \sigma\rangle = \langle q, \sigma|\Theta^{-1}\Theta H\Theta^{-1}\Theta|q, \sigma\rangle = \langle q, \sigma|\Theta^{-1}H\Theta|q, \sigma\rangle \\ &= \langle \Theta q, \sigma|H|\Theta q, \sigma\rangle^{*} = \langle \bar{q}, -\sigma|H|\bar{q}, -\sigma\rangle \end{aligned} \tag{6.165}$$

$|\bar{q}, -\sigma\rangle$ はスピンの向きが $|q\rangle$ と反対方向であるが，質量はスピンの向きに依存しないので，粒子と反粒子の質量は等しい．

（ii） 粒子と反粒子の磁気能率は符号が逆で同じ大きさである．

（iii） 粒子と反粒子の寿命は等しい．

ハミルトニアン H を強い相互作用 H_s と崩壊を引き起こす弱い相互作用 H_w とに分ける．全崩壊率は

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\pi\sum\delta(M_i-E_n)\langle f|H_w|n\rangle\langle n|H_w|i\rangle \\ &= 2\pi\sum\rho_F|\langle f|H_w|i\rangle|^2 \end{aligned} \tag{6.166}$$

で与えられる．

$$\langle f|H_w|i\rangle = \langle\Theta f|H_w|\Theta i\rangle^* \tag{6.167}$$

であるから，$|\Theta f\rangle\neq|f\rangle$ であっても終状態については和をとってしまうので，$|i\rangle$ と $|\Theta i\rangle$ からの全崩壊率は等しい．したがって，寿命も等しい．

6.6 アイソスピン

素粒子（ハドロン）には，電荷は異なるが，性質の似通っている小グループが数多く存在する．例えば次の粒子群は，質量値（単位 MeV）がほとんど同一で

$$\begin{bmatrix} \mathrm{p} \\ \\ \mathrm{n} \end{bmatrix}\begin{matrix} 938.28 \\ \\ 939.57 \end{matrix}\quad \begin{bmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{bmatrix}\begin{matrix} 139.567 \\ 134.963 \\ 139.567 \end{matrix}\quad \begin{bmatrix} \mathrm{K}^+ \\ \\ \mathrm{K}^0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 493.67 \\ \\ 497.7 \end{matrix}\quad \begin{bmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{bmatrix}\begin{matrix} 1189.36 \\ 1192.46 \\ 1197.34 \end{matrix} \tag{6.168}$$

$\delta m/m$　　0.14%　　3.3%　　0.8%　　0.33%

あるばかりか，強い相互作用するときの力の強さまでが同一であることが知られている．電荷が違うため電磁相互作用の分だけ異なるが，これは強い相互作用に比べ 100 倍くらい小さい．したがって強い相互作用に関する限り，これらの粒子群は質量差を無視すれば，同一グループの中では区別のつかない同一粒子であるといえる．そこで，スピン多重項が中心力の下では縮退している例にならい，これらをアイソスピン多重項と呼ぶ．

スピンの縮退が磁場を掛けることによって解ける（ゼーマン効果）ように，アイソスピンの縮退は電磁相互作用を点火することによって解ける．そこで，アイソスピン空間というある抽象的な空間を考え，強い相互作用をこの空間での中心力と見なし，電磁相互作用をこの空間での回転対称を破るいわば磁場のようなものと見なすのである．アイソスピンをこの空間での回転演算子と考えれば，アイソスピンの数学的構造はスピンと同等であり，これがアイソスピン

の名前の由来でもある.

6.6.1 核力の荷電独立

アイソスピンの概念は，歴史的には，鏡映核などの原子核のエネルギー準位がよく似ている事実などから，核力が陽子と中性子の間で変わらないことがわかり，これから，陽子と中性子は核子という同一粒子の電荷が違うだけの状態であるという認識 (ハイゼンベルグの提案 (1932 年)) に始まる．アイソスピン空間回転を数学的に形式化するため，粒子 1 と粒子 2 の変換を考えよう．イメージを明らかにするため粒子 1 は陽子，粒子 2 は中性子と想定する．核力ポテンシャルを V として，陽子間に働くポテンシャル (すなわち陽子に働く力) を V_{pp} とすれば，核力が陽子と中性子の入れ換えで変わらないのが，

$$V_{\mathrm{pp}}=V_{\mathrm{nn}} \qquad \text{：荷電対称} \tag{6.169 a}$$

陽子と中性子のいかんにかかわらないのが，

$$V_{\mathrm{pp}}=V_{\mathrm{nn}}=V_{\mathrm{pn}} \qquad \text{：荷電独立} \tag{6.169 b}$$

である．以下，この事実を数学的に形式化してみよう．

6.6.2 $SU(2)$ 対 称

$$\psi_{\mathrm{p}}, \psi_{\mathrm{n}} \longrightarrow \psi_{\mathrm{p}}', \psi_{\mathrm{n}}', \qquad \psi_{\mathrm{p}}'=\alpha\psi_{\mathrm{p}}+\beta\psi_{\mathrm{n}} \tag{6.170 a}$$

$$\psi_{\mathrm{n}}'=\gamma\psi_{\mathrm{p}}+\delta\psi_{\mathrm{n}} \tag{6.170 b}$$

あるいは行列表示で，

$$\psi\equiv\begin{bmatrix}\psi_{\mathrm{p}}\\ \psi_{\mathrm{n}}\end{bmatrix}, \qquad \psi'=\begin{bmatrix}\psi_{\mathrm{p}}'\\ \psi_{\mathrm{n}}'\end{bmatrix} \tag{6.171 a}$$

とすれば，荷電独立 (6.169 b) は

$$\psi'=U\psi, \qquad U=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix} \tag{6.171 b}$$

という変換に対し，核力ポテンシャルの期待値が変わらないことを示している．確率の保存から (6.171 b) の変換はユニタリー変換でなければならない．

$$U^{\dagger}U=UU^{\dagger}=1 \tag{6.172 a}$$

この条件から，$\alpha, \beta, \cdots$ に対する条件を求めると，

$$U=\mathrm{e}^{i\phi}\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^*\end{bmatrix}, \qquad |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \tag{6.172 b}$$

の形をとる．さらにユニモジュラー (det $U=1$) という条件をつけると，U は

$$U=\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^*\end{bmatrix}, \qquad |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \tag{6.172 c}$$

となり，U は 3 個の独立パラメターのみにより表される．

一般に任意の n 次元ユニタリー，ユニモジュラー行列は，$\boldsymbol{\lambda}\,(\lambda_i; i=1\sim n^2-1)$ を無軌跡の行列とし，回転角 θ と回転軸 $\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}^2=1)$ をパラメターとして，

$$U=\exp[-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n}(\theta/2)] \tag{6.173}$$

の形で表すことができる[*5]．2 次元の場合，無軌跡でエルミートな独立な行列は 3 個あり，パウリ行列 τ_i にとることができる．このときの独立変数の数は 3 である．

$$\tau_1=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \tau_2=\begin{bmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{bmatrix}, \quad \tau_3=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{6.174}$$

$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\tau}/2$ は，

$$[s_i, s_j]=i\varepsilon_{ijk}s_k \tag{6.175}$$

という角運動量と同じ交換関係を満たすので，(6.173) のユニタリー変換は，回転演算子と全く同じ形をしていることがわかる．ただし回転を行う相手が，実空間 (外部空間ともいう) の物理量ではなく，(6.171) で与えられるように，陽子と中性子からつくられる波動関数であることが違う．つまり回転を行う空間はある種の抽象的な内部空間で，回転されるベクトルはある方向を向けば陽子で別の方向を向けば中性子であるような量である．このような内部空間での対称性を内部対称という．これに反し並進回転など時空座標の変換に関わる対称を外部対称性といい，付随する量子数 (パリティ，スピンなど) を外部量子数という．陽子と中性子の区別を $\varphi_r(x)$, $r=1,2$ とするならば内部対称は r を変数とする操作であり，外部対称は x を操作するときの対称性であって，両者は全く独立である．ただし CPT のように結びついているのもある．

[*5] Q がエルミート行列であるとき，$U=\exp(iQ)$ という形の行列はユニタリーであることが保証され，$\mathrm{Tr}[Q]=0$ であるならば，ユニモジュラーであることが保証される．これを見るには，微小パラメターを ε とし，εQ について 1 次の項の考察をすればよい．

一般に，n 個の複素量のノルム

$$\psi^\dagger\psi=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+\cdots+|\psi_n|^2$$

を一定にする変換のすべては，群をつくるのでユニタリー群，その中でもユニモジュラーのものを特別ユニタリー群 (special unitary group) といい，それぞれ $U(n)$, $SU(n)$ のように表す．

$SU(2)$ 群の数学は，角運動量による実空間での回転と全く同一であるから，同じ言葉を使って表現するのが便利である．例えば，陽子と中性子は 2 個組んで，アイソスピン 1/2 の核子を構成し，$\pi^\pm, \pi^0$ は 3 個の組であるのでアイソスピン 1 をもつ．つまり，π はアイソ空間での 3 次元ベクトルである．

核力が荷電独立 (charge independence) ということは，核子と π 中間子との相互作用が回転不変な形をしていることすなわち（アイソ）スカラーとなっていることを意味する．核子と π のアイソスピンを考慮すると，相互作用ハミルトニアンは，アイソスピノールからつくるベクトル $\psi^\dagger\boldsymbol{\tau}\psi$ とベクトル $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ のスカラー積

$$H_{\rm INT}=g\psi^\dagger\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}\psi^{*6)} \tag{6.176}$$

の形をしていなければならない．以下 $\psi_{\rm p}, \psi_{\rm n}$ を，p, n で表し，場の演算子と見立てることにする．π^+, π^0, π^- の演算子を π^+, π^0, π^- と書き，

$$\begin{aligned}\pi^-&=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}\\ \pi^+&=(\phi_1-i\phi_2)/\sqrt{2}\\ \pi^0&=\phi_3\end{aligned} \tag{6.177}$$

と分解すると*7)，(6.176) は，

$$\begin{aligned}H_{\rm INT}&=g[(\bar{n}p+\bar{p}n)\phi_1+i(\bar{n}p-\bar{p}n)\phi_2+(\bar{p}p-\bar{n}n)\phi_3]\\ &=g[\sqrt{2}(\bar{p}n\pi^++\bar{n}p\pi^-)+(\bar{p}p-\bar{n}n)\pi^0]\end{aligned} \tag{6.178}$$

---

*6) フォトンと違い π 中間子は，実空間では擬スカラー（スピン 0）であるので，相互作用の時空構造は，電磁相互作用のベクトル型 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ の形でなく，擬スカラー型 $\bar{\psi}\gamma^5\psi\pi$ となる．しかし，ここではアイソスピン空間での構造を問題にしているので，時空構造は問わない．

*7) 通常の角運動量形式で慣用的に使われている位相（クレブシュ-ゴルダン係数を使うときの位相）を採用すると，

$$|I, I_3\rangle \text{ の } |1,1\rangle\sim-(x+iy)/\sqrt{2},\quad |1,0\rangle\sim z,\quad |1,-1\rangle\sim(x-iy)/\sqrt{2}$$

であるので，ここでの π の場のつくる $|\pi^+\rangle, |\pi\rangle, |\pi^-\rangle$ は，$-|1,+1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$ となり，位相が異なる．後にでてくる G 変換での $G|\pi\rangle=-|\pi\rangle$ (6.192) は，この位相を採用したときに成立する．

となって，

$$p \longleftrightarrow n+\pi^+ : n \longleftrightarrow p+\pi^- : p \longleftrightarrow p+\pi^0 : n \longleftrightarrow n+\pi^0$$

の相互作用の強さの比が，それぞれ

$$\sqrt{2} : \sqrt{2} : 1 : -1$$

であることを示す．これが，(6.169) の条件 $V_{pp}=V_{nn}=V_{pn}$ 満たすことは次のようにして1粒子交換の図における結合の強さ（図6.7）からいえる．

図6.7 (a)：π^0 交換　　$V_{pp}=g^2[(1)\times(1)]=g^2$

図6.7 (b)：π^0 交換　　$V_{nn}=g^2[(-1)\times(-1)]=g^2$

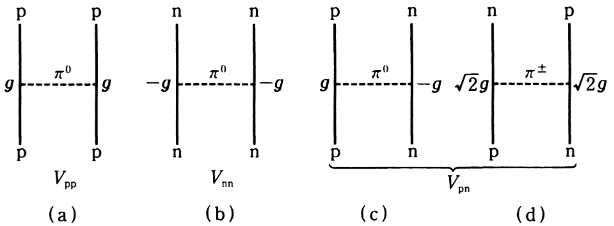


図 6.7　核力の荷電独立性；$V_{pp}=V_{nn}=V_{pn}$
荷電独立を仮定すると核子と π の結合は符号をも含めて決められる．
核子間の力の強さは核子の種類によらず等しい（普遍的）．

図6.7 (c)：π^0 交換　　$V_{pn}(c)=g^2[(1)\times(-1)]=-g^2$

図6.7 (d)：$\pi^\pm$ 交換　　$V_{pn}(d)=g^2[(\sqrt{2})\times(\sqrt{2})]=2g^2$

そこで，pn が交換で対称ならば $(I=1)$

$$\therefore \quad V_{pn}(c)+V_{pn}(d)=g^2=V_{pp}=V_{nn} \tag{6.179}$$

6.6.3 ウィグナー-エッカートの定理

素粒子反応において，荷電独立すなわちアイソスピン空間での回転不変性が成立するならば，実空間の回転不変と同じように，アイソスピンの大きさ (I) とその第3成分 I_3 が保存する（Wigner-Eckart の定理[13]）．

$$\langle I'I_3'|T|II_3\rangle=\delta_{II'}\delta_{I_3I_3'}\langle I|T|I\rangle \tag{6.180}$$

なお，I_3 の違いは，電荷の違いであるから，アイソスピン第3成分の保存とは，電荷の保存を意味する．

a. 応用例1

重水素dは，陽子と中性子の束縛状態であるが，陽子と陽子または中性子と中性子との束縛状態等，電荷の違う仲間をもたないので，アイソスピンは0である．同様の考察によりヘリウムHeもアイソスピン0である．π^0 はアイソスピン1をもつので，次の反応はアイソスピン保存を破り起こらないはずであり，事実観測されていない．

$$\mathrm{d}+\mathrm{d} \longrightarrow \mathrm{He}+\pi^0 \tag{6.181}$$

b. 応用例2：πN 散乱

π と核子には種々の組み合わせがあるが，実験が容易なのは次の3種である．

$$\pi^+ + \mathrm{p} \longrightarrow \pi^+ + \mathrm{p} \tag{6.182 a}$$

$$\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow \pi^- + \mathrm{p} \tag{6.182 b}$$

$$\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow \pi^0 + \mathrm{n} \tag{6.182 c}$$

荷電独立が成り立てばアイソスピンは保存するので，上記3種の反応をアイソスピンの固有状態 $|II_3\rangle$ で書き直してみよう．付録Dのクレプシュ-ゴルダン係数を使って

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle &= \pi^+ p \\
\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^+ n + \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^0 p \\
\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^0 n + \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^- p \\
\left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle &= \pi^- n
\end{aligned} \tag{6.183}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^+ n - \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^0 p \\
\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^0 n - \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^- p
\end{aligned} \tag{6.184}$$

これらを逆に解くと*8)，

*8) クレプシュ-ゴルダン計数は直交行列をつくる．したがって，表を横に読む代わりに縦に読めば逆行列が得られる．

$$|\pi^+ p\rangle = \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$|\pi^- p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|\pi^0 n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \tag{6.185}$$

(6.180) のウィグナー-エッカートの定理を使うと，

$$\langle\pi^+ p|T|\pi^+ p\rangle = \left\langle\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right|T\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = T\left(\frac{3}{2}\right) \tag{6.186 a}$$

$$\langle\pi^- p|T|\pi^- p\rangle$$
$$= \left[\sqrt{\frac{1}{3}}\left\langle\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right| - \sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right|\right] T \left[\sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left\{T\left(\frac{3}{2}\right) + 2T\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{6.186 b}$$

$$\langle\pi^0 n|T|\pi^- p\rangle$$
$$= \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right| + \sqrt{\frac{1}{3}}\left\langle\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right|\right] T \left[\sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right]$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{T\left(\frac{3}{2}\right) - T\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{6.186 c}$$

となり，3 種類の反応 (8 種類でも同じ) が，2 個の独立量 (それぞれ $I=1/2$, 3/2 に対応) で表せたことになる．(6.186 a)～(6.186 c) を組み合わせれば，

$$-\langle\pi^+ p|T|\pi^+ p\rangle + \langle\pi^- p|T|\pi^- p\rangle + \sqrt{2}\langle\pi^0 n|T|\pi^- p\rangle = 0 \tag{6.187 a}$$

上記のそれぞれの過程の断面積を $d\sigma^+, d\sigma^-, d\sigma^0$ で表せば，断面積は振幅の自乗に比例するから，(6.187 a) は，

$$(d\sigma^-)^{1/2} - \sqrt{2}(d\sigma^0)^{1/2} < (d\sigma^+)^{1/2} < (d\sigma^-)^{1/2} + \sqrt{2}(d\sigma^0)^{1/2}$$
$$\sqrt{2}(d\sigma^0)^{1/2} - (d\sigma^+)^{1/2} < (d\sigma^-)^{1/2} < \sqrt{2}(d\sigma^0)^{1/2} + (d\sigma^+)^{1/2}$$
$$(d\sigma^+)^{1/2} - (d\sigma^-)^{1/2} < \sqrt{2}(d\sigma^0)^{1/2} < (d\sigma^+)^{1/2} + (d\sigma^-)^{1/2} \tag{6.187 b}$$

とも書ける．k を適当な係数として，

$$d\sigma^+ = d\sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p) = k\left|T\left(\frac{3}{2}\right)\right|^2$$

$$d\sigma^- = d\sigma(\pi^- p \to \pi^- p) = k\left|\frac{1}{3}\left\{T\left(\frac{3}{2}\right) + 2T\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right|^2$$

$$d\sigma^0 = d\sigma(\pi^-p \to \pi^0 n) = k\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\left\{T\left(\frac{3}{2}\right) - T\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right|^2 \tag{6.188}$$

と書けるから，$T\left(\frac{3}{2}\right) \gg T\left(\frac{1}{2}\right)$ ならば，

$$d\sigma^+ : d\sigma^- : d\sigma^0 = 9:1:2 \tag{6.189 a}$$

逆に，$T\left(\frac{3}{2}\right) \ll T\left(\frac{1}{2}\right)$ ならば，

$$d\sigma^+ : d\sigma^- : d\sigma^0 = 0:2:1 \tag{6.189 b}$$

が成立する．この関係は，アイソスピンのみの性質を使い，他の力学変数には制限をつけていないから，散乱角度やエネルギーなど同一条件で比較する限り，任意の値で成立する．πp 散乱の顕著な共鳴 Δ(1232) 付近の全断面積実験データを図 6.8 に示す．測定値は，共鳴の頂点のところで，

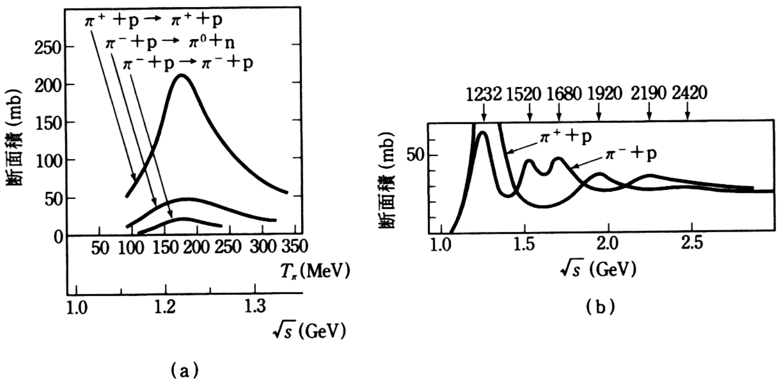


図 6.8 πN 散乱の断面積

(a) Δ(1232) 付近の 3 種類の 2 体反応断面積

(b) π^+p, π^-p 散乱全断面積，Δ(1232) での π^+p 全断面積は (a) の弾性散乱断面積にほとんど等しい．

$$210\ \text{mb} : 24\ \text{mb} : 48\ \text{mb}$$

であり，Δ(1232) は，アイソスピン 3/2 をもつことを示す．

Δ(1232) は，π^+p, π^+n, π^-p, π^-n など，電荷が，++，+，0，− の (πN)，($\pi\pi$N) 系などで観測されており，アイソスピン 3/2 のメンバーであることは，このような検定をするまでもないが，上記の断面積比が予言通りであることは，Δ(1232) のアイソスピンが確かに 3/2 であり，かつ強い相互作用での荷電独立仮定が非常によく成立していることの証拠である．

演習 6.10　ヘリウム ^{3}He と，3 重水素 ^{3}H は，アイソスピン 2 重項をつくる．

$$\frac{d\sigma(pd \to {}^3H\pi^+)}{d\sigma(pd \to {}^3He\pi^0)} = 2 \tag{6.190}$$

を示せ．

演習 6.11　(K^+, K^0), $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$ はアイソスピン多重項をなす．

$$\pi^+ + p \longrightarrow K^+ + \Sigma^+$$

$$\pi^- + p \longrightarrow K^0 + \Sigma^0$$

$$\pi^- + p \longrightarrow K^+ + \Sigma^-$$

の各振幅を a^+, a^0, a^- とするとき，

$$\sqrt{2}a^0 + a^- - a^+ = 0 \tag{6.191}$$

を示せ．

演習 6.12　$(\overline{K}^0, -K^-)$, (K^+, K^0), (Ξ^0, Ξ^-) はアイソスピン二重項をなす．

$$K^- n \longrightarrow K^0 \Xi^-$$

$$K^- p \longrightarrow K^+ \Xi^-$$

$$K^- p \longrightarrow K^0 \Xi^0$$

の振幅の間の次の関係式を証明せよ．

$$f(K^0\Xi^-) = f(K^+\Xi^-) = f(K^0\Xi^0) \tag{6.192}$$

演習 6.13

$$\frac{d\sigma(pp \to d\pi^+)}{d\sigma(np \to d\pi^0)} = 2 \tag{6.193}$$

を示せ．

演習 6.14　Λ^0 は，アイソスピン 0 の粒子である．

$$d\sigma(\pi^+ n \to K^+\Lambda^0) = d\sigma(\pi^- p \to K^0\Lambda^0)$$

を示せ．

6.6.4　反粒子のアイソスピン

反粒子のアイソスピンを求めるために (6.170) に荷電共役変換を施す．そうすると波動関数 ψ は反粒子を記述するようになるが，荷電共役変換には複素共役をとる演算が含まれるので，反粒子の変換は，

$$\overline{p}' = \alpha^* \overline{p} + \beta^* \overline{n} \tag{6.194 a}$$

$$\overline{n}' = -\beta \overline{p} + \alpha \overline{n} \tag{6.194 b}$$

となる．ただし，$\overline{p}, \overline{n}$ でもって，それぞれの反粒子の波動関数を表すものとした．一般に，粒子の対称操作演算行列が U であるならば，反粒子の対称操作は，複素共役をとった U^* で与えられる．(6.194) を並べ換えると，

$$(-\bar{n}')=\alpha(-\bar{n})+\beta\bar{p} \tag{6.195 a}$$

$$\bar{p}'=-\beta^*(-\bar{n})+\alpha^*\bar{p} \tag{6.195 b}$$

となる．すなわち，

$$\begin{bmatrix}-\bar{n}'\\ \bar{p}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta^* & \alpha^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\bar{n}\\ \bar{p}\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}-\bar{n}\\ \bar{p}\end{bmatrix} \tag{6.196}$$

この式は，(p, n) がアイソスピン二重項ならば，$(-\bar{n}, \bar{p})$ もまた二重項であることを示している．

a．荷電対称

(6.169 a) で荷電対称にふれたが，アイソスピン演算子で，より正確に定義すれば，$\exp(-i\pi I_2)$ となる．2 核子系の場合は，

$$\exp(-i\pi I_2)=\exp(-i\pi\tau_2/2)=-i\tau_2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{6.197}$$

で与えられるので，$(p, n)\to(-n, p)$ となる．

b．フェルミ-ヤンモデル

(p, n) と $(-\bar{n}, \bar{p})$ の二つの二重項を合成すれば，$I=1$ のメンバーとして，

$$|1, 1\rangle=-p\bar{n},\quad |1, 0\rangle=(p\bar{p}-n\bar{n})/\sqrt{2},\quad |1, -1\rangle=n\bar{p}$$

を得る．この状態は，バリオン数 0，アイソスピン 1 の状態を表すから，π^+, π^0, π^- と同じ量子数をもつ．よって，π を核子の束縛状態と見なす考えが成立する．これは，後のクォークモデルに至る素粒子複合粒子モデルの最初の提案であった．

c．G 変 換

C を荷電共役変換とすると，上に述べた変換は，

$$\begin{bmatrix}p\\ n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-\bar{n}\\ \bar{p}\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}-n\\ p\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ n\end{bmatrix}\equiv G\begin{bmatrix}p\\ n\end{bmatrix}$$

$$G=Ce^{-i\pi\tau_2/2} \tag{6.198}$$

で与えられる．変換 G を施したものが同じアイソスピン変換性を示すということは，G 演算子がアイソスピン回転演算子 U と可換であることを意味する．さらに任意の次元の表現は，基本になる二重項の表現の積の形で表せるから，結局

$$G \equiv C e^{-i\pi I_2} \tag{6.199}$$

で定義する G 変換は，すべてのアイソスピン演算と可換である．

G 変換を π 中間子に施してみよう．π はアイソスピン空間でのベクトルである．C 変換で $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$ であるが，(6.177) に示されるように，これは，C 変換で $\pi_2 \to -\pi_2$ となることを意味する．$\exp(-i\pi I_2)$ は，2 軸回りの 180° 回転であるから，$\pi_1, \pi_3 \to -\pi_1, -\pi_3$ となる．結局すべての π_i が G で符号を変える．

$$G\pi = -\pi \tag{6.200}$$

したがって，n 個の π よりなる系は $G=(-1)^n$ の G パリティをもつ．このように G 変換は，荷電共役変換と違い荷電粒子でも使えるのでより便利である．しかし，G 変換はアイソスピン回転を含むのでその有効性は強い相互作用に限られる．電磁相互作用では，G 変換のパリティは保存しない．逆にこれを電磁相互作用と強い相互作用を区別するのに用いることもできる．特に有用なのは，$I_3=0$ の中性の系で,次の定理が成立する．

定理　粒子 q と反粒子 $\bar{q}$ よりなる系の G パリティは，$(-1)^{S+L+I}$ である．

証明　アイソスピンと角運動量の従う数学は同じであるから，$\exp(i\pi I_2)$ の固有値は，$\exp(i\pi L_y)$ の固有値と同じである．中性なので，$I_3=0$ であるから固有関数は $Y_{I,0}$ を考えればよい．$Y_{I,0} \sim P_I$ (I 次のルジャンドル多項式)，$P_I(-x)=(-1)^I P_I(x)$ を考慮すると，y 軸回りの 180° 回転で，$\theta \to \pi-\theta$, $\phi \to \pi-\phi$ であるから，$\cos\theta \to -\cos\theta$ として，

$$\exp(i\pi I_2)\, Y_{I,0} = (-1)^I\, Y_{I,0}$$

一方，中性の系では，$C=(-1)^{L+S}$ であるので ((6.108) 参照)，$G=(-1)^{L+S+I}$

（証明終わり）

G 変換の応用例 1　このことから，$\bar{p}p$ 系では，$I=0(\bar{p}p+\bar{n}n)$ の系と $I=1(\bar{p}p-\bar{n}n)$ の系では，選択則が異なる．もし $\bar{p}$ を水素泡箱の中に止めて，反応を起こさせるとすると，反応は軌道角運動量 0 の S 状態から起こる．この時，$I=0$ ならばスピンは反対称状態つまり $S=0$, $I=1$ ならばスピンは対称状態つまり $S=1$ となるので，$G=(-1)^{I+S}$ から，$I=0$ ならば $G=+$ の 2π, $4\pi, \cdots$, $I=1$ ならば $G=-$ の $1\pi, 3\pi, \cdots$ となる．$\bar{p}p$ の中に $I=0$ と $I=1$ の状態は，50％ずつ入っているから，奇数個の π を生成する確率と偶数個の π を

生成する確率は等しい[*9)].

G 変換の応用例 2

$$\rho^{\pm}(1^-) \longrightarrow \pi^{\pm}\pi^0 \quad \therefore \quad G_\rho=+,\ \text{したがって,}\ \rho \not\longleftrightarrow 3\pi$$

$$\omega(1^-) \longrightarrow \pi^{+}\pi^{-}\pi^0 \quad \therefore \quad G_\omega=-,\ \text{したがって,}\ \omega \not\longleftrightarrow 2\pi$$

G 変換の応用例 3　η は，$I=0$ の粒子であり，2γ, $3\pi^0$, $\pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^+\pi^-\gamma$ への崩壊モードがあり，同程度の頻度で起こる．2γ モードがあるから，$C\eta=+$, $I=0$ であるから，$G=+$，ところが 3π は，G パリティが負であるから，このモードは G パリティを破っており，電磁相互作用によるものとわかる．

演習 6.15　C, P, L 等の考察を進め，$J<2$ ならば，η の $J^{PC}=0^{-+}$ になることを示せ．

参考文献

1) M. Jacob and G. C. Wick : *Annals of Phys*., **7** (1959) 404
2) R. Plano *et al.*: *Phys. Rev. Lett*., **3** (1959) 525
3) C. Alf *et al.*: *Phys. Rev. Lett*., **9** (1962) 325
4) G. Culligan *et al.*: *Nature*, **180** (1957) 751
P.C. Macq *et al.*: *Phys. Rev*., **112** (1958) 2061
5) W. Von Witsch *et al.*: *Phys. Rev*., **169** (1968) 923
6) W.F. Cartwright *et al.*: *Phys. Rev*., **91** (1953) 677
7) R. Durbin *et al.*: *Phys. Rev*., **83** (1951) 646, **85** (1952) 523
8) J.M. Pendlebury *et al.*: *Phys. Lett*., **B136** (1984) 327
K.F. Smith *et al.*: *Phys. Lett*., **B234** (1990) 141
9) I.S. Altarev *et al.*: *Phys. Lett*., **B276** (1992) 242
10) X.G. He : *Int. J. Mod. Phys*., **A4** (1989) 5011
11) 例えば，L-R 対称理論
R.N. Mohapatra and J.C. Pati : *Phys. Rev*., **D11** (1974) 566
12) 例えば，J.D. Jackson *et al.*: *Nucl. Phys*., **4** (1957) 206
Morse *et al.*: *Phys. Rev*. **D21** (1980) 1750
13) 例えば，M.E. Rose : Elementary Theory of Angular momentum, John Wiley & Sons (1957) 85-88

[*9)] 位相空間の体積による差はある．

7

加速器と測定器[*1)]

素粒子の性質は，高エネルギーの粒子同士を衝突させ，その結果生じた2次粒子を検出して反応パターンを調べることにより得られる．粒子を高エネルギーに加速するのが加速器の役目であり，反応の2次粒子を検出するのが測定器である．素粒子物理は実証に基づく学問であり，素粒子物理の発展は実験技術の発展と密接に結びついている．第1原理から導かれる応用問題が，どのように自然現象に結びつくか，理論の仮説をどう検証すべきかの手法を習得し，ある実験がどのような方針でいかなる技術を駆使して行われたかを理解し，その実験法の長所と弱点を把握することは，データを正しく解釈する上において非常に大事である．歴史的に誤った実験データに振り回されて回り道をすることがしばしばあった．実験技術の基本知識を身につけ正しい批判力を養うことは，観測される現象を確実に測定する手段を自ら考え出す能力を養うだけでなく，実験の誤りを防ぎ，新しい理論の発想にもつながる．しかし，実験技術に必要な知識は電磁気学，物性，原子分子，原子核物理に基づくものが多く，素粒子物理の内容とはいささかかけ離れる．詳細に述べると使用マニュアル的になるので，ここでは，高エネルギー実験手法の一般的な基礎概念といくつかの測定器例を述べるにとどめることとし，重要な実験については，各論で必要に応じてふれる．なおこの章に限って，実用上の見地から，$\hbar$, c, ε_0 などあらわに書くことにする．

[*1)] この章は，実験技術の基礎を解説したものであり，物理の解説ではないので，スキップして必要に応じて参照してもよい．

7.1 加　速　器

7.1.1 加速器の基本パラメター[1)]

a. 粒　子　種

加速は通常荷電粒子に電場を掛けて行う．荷電粒子の電荷を q，加速電圧を V（ボルト）とすれば，この電場により粒子の得るエネルギー E は

$$E=qV=q\varepsilon d \tag{7.1}$$

ε は電位の勾配で，d は加速管の長さである．電子の電荷（$=1.6\times10^{-19}$ クーロン）をもつ粒子を，1 ボルトの電圧で加速して得られるエネルギーを 1 電子ボルトという．電子ボルト（electron volt，略して eV）は小さい単位であるので，よく使われる単位と，そのエネルギー領域の物理を示す．

$\mathrm{KeV}=10^3\,\mathrm{eV}$ ：X 線エネルギー，原子分子構造

$\mathrm{MeV}=10^6\,\mathrm{eV}$ ：原子核反応

：π 中間子質量 $=139.6\,\mathrm{MeV/c^2}$

：ハドロンの大きさ　$\sim\hbar/m_\pi c\sim1.4\times10^{-13}\,\mathrm{cm}$　　(7.2)

$\mathrm{GeV}=10^9\,\mathrm{eV}$ ：陽子質量 $=0.938\,\mathrm{GeV/c^2}$

：W ボソン質量 $=80.26\,\mathrm{GeV/c^2}$

（電弱相互作用エネルギースケール〜 $(\sqrt{2}G_\mathrm{F})^{-1/2}=250\,\mathrm{GeV}$）

$\mathrm{TeV}=10^{12}\mathrm{eV}$ ：クォーク構造，新現象？

加速器で加速できる素粒子は，通常は安定粒子である電子もしくは陽子（陽電子および反陽子を含む）のみであり，π, K 中間子やハイペロン（Λ, Σ 等）など，不安定粒子ビームを用いての反応過程を調べたいときは，陽子ビームを物質（通常ベリリウムや鉄等を使用）に照射して，2 次的に生産される粒子のビームを使う．ニュートリノやミューオンの場合は，さらに π, K が崩壊してできる 3 次粒子を使う．このため，2 次，3 次ビームのエネルギーは，通常 1 次ビームの 1/2 以下であり，ビーム強度も 1 次ビームの $10^{-6}\sim10^{-7}$ 程度となる．統一理論確立以前は，強，弱，電磁相互作用はそれぞれ独立な現象として見なされ，実験的にも粒子種を選ぶ必要があったので，2 次ビームによる実験

は重要な位置を占めた．歴史的には，固定標的によるハドロンビーム（陽子，π, K 中間子ビーム）実験は，1960 年代素粒子の新種発見や分類（ハドロンスペクトロスコピー）に絶大な力を発揮し，またハイペロンビームは主にハイペロンの磁気能率測定や弱い相互作用による崩壊の性質に寄与して[2]，ともにクォークモデルを発展させた．ニュートリノビーム[3]による実験は，1970 年代中性カレント現象を発見し，弱い相互作用の体系やハドロンのクォークパートン構造を明らかにして，統一理論の実現へ向けての大きな寄与があった．ミューオンビーム[4]による実験は，電子実験での知見をさらに高いエネルギー領域で拡大するとともに，ニュートリノ実験の成果をいっそう精密化し，陽子のクォークグルーオン構造の決定さらには構造関数のエネルギー依存生の測定から QCD の確立に寄与した．

しかし，統一理論の完成により，すべての相互作用を統一的総合的に考察することが可能になってからは，エネルギーが共通の最重要のパラメターとなり，粒子種の選択は 2 次的な意義しかもたなくなった．相互作用の種類に関係なく新しいエネルギー領域での新粒子発見の重要さが高まったのである．エネルギーを得る上においては，衝突型加速器の方が固定標的型に比べて圧倒的に有利である．また加速器工学上陽子の方が電子よりは高いエネルギーが得やすいので，陽子・陽子衝突型加速器はエネルギーフロンティアの加速器としては有利な立場にある．ただし，電子・陽電子衝突型加速器には，エネルギーは陽子に比べて低いものの雑音が少ないという利点があり，希少信号探索やスペクトロスコピー研究において，理論との比較が容易で論争の決着をつける上でしばしば威力を発揮する．

今日の固定標的実験は，衝突型実験に比べて高強度のビームが使用可能で，まれな現象の探求，精密実験においてその有用さが発揮される．例えば，高強度の K ビームを必要とする *CP* 非保存の実験（第 11 章 参照），ニュートリノを使う実験（第 12 章参照），重いクォーク (c, b) スペクトロスコピーの稀現象での分岐比決定などである．一般的にいえば，衝突型加速器を使う実験に比較して，明確な研究目的と独創的な視点が要求され，またそのようなときに有用性が発揮されることが多い．

b. エネルギー

加速器の提供し得る最高エネルギーは，探査すべき対象の最小サイズを決めるという意味で，ルミノシティ（luminosity；輝度）とともに最も基本的なパラメターである．ルミノシティは反応事象数を決める量であり，エネルギーが顕微鏡の倍率に当たるとすれば，ルミノシティは映像の鮮明さを決める量である．最小サイズのスケール λ は，加速器のエネルギー E と

$$\lambda \simeq \frac{\hbar c}{E} = \frac{2\times10^{-14}}{\sqrt{s}/2(\mathrm{GeV})}\ \mathrm{cm} \tag{7.3}$$

という関係式で結びついている．ただし，このエネルギーは重心系でのエネルギーである．本書では重心系での全エネルギーに対しては $\sqrt{s}$ という記号を使う．s は反応する二つの粒子の運動量エネルギーから次式で定義される量である（5.2 節参照）．

$$s = c^2(p_1+p_2)^2 = (E_1+E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 c + \boldsymbol{p}_2 c)^2 \tag{7.4}$$

衝突型加速器による実験では，$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ であるので，$\sqrt{s}$ は衝突ビームエネルギーの和 (E_1+E_2) に等しい．固定標的実験の場合は，$\boldsymbol{p}_2=0$ であるから，$E_1 \gg m_1c^2$，m_2c^2 として

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_1+m_2c^2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 c)^2} \simeq \sqrt{2E_1 m_2 c^2} \tag{7.5}$$

となり，重心系エネルギーはビームエネルギーの平方根でしか増えないので，衝突型に比べ効率が悪い．最近 20 年間の高エネルギー物理実験の大きな成果は，いくつかの例外を除きほとんど衝突型加速器で得られたのはこの理由による．

演習 7.1　現時点で世界最高エネルギーを誇る米国フェルミ研究所の衝突型加速器 TEVATRON は全エネルギーが，1.8 TeV＝(900＋900)GeV である．このビームを固定標的実験（標的は水素とする．陽子の質量は 0.938 GeV）に使用する場合の重心系でのエネルギーを求め，W 粒子（質量エネルギー＝80 GeV）の生成は不可能であることを確かめよ（注：TEVATRON は最初 400 GeV の固定標的実験用加速器として 1973 年に稼働開始し[5]，W 生成は研究目的の一つであった）．

陽子衝突型加速器の実効エネルギー　電子はそれ自体素粒子であるので，電子衝突型加速器の場合は，重心系の全エネルギーが有効に使用される．一方，陽子はクォークの複合体であるので，有効に使用されるエネルギーは，反

応に関与するクォーク対のもつエネルギーのみである．クォーク1個のもつエネルギー運動量を陽子の x $(0 \leqq x \leqq 1)$ 倍とすると，衝突するクォーク系のもつ全エネルギー $\sqrt{\hat{s}}$ は，陽子系のもつ全エネルギー $\sqrt{s}$ とは

$$\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{(x_1 p_1 c + x_2 p_2 c)^2} \approx \sqrt{x_1 x_2}\sqrt{s} \tag{7.6}$$

の関係にある．x 分布は実測されていて（第12章「核子の構造」），x の平均値は 0.1～0.2 であるので $\sqrt{\hat{s}} \simeq (0.01\sim0.2)\sqrt{s}$ である．しかし，確率は小さいが，$x_1 x_2 \simeq 1$ の実効エネルギーをもつクォークも存在するので，$\sqrt{\hat{s}} \simeq \sqrt{s}$ に近いところでの反応も可能である．この場合問題にする反応が有用かどうかは，ビームの輝度と対象とする反応の全体に対する割合すなわち信号対雑音比（S/N 比）に依存する．

c．ルミノシティ（輝度）

得られた反応がどの程度説得力のあるきれいな信号となりうるかは，ルミノシティ（luminosity；輝度）が大きく作用する．輝度 L は，反応断面積 σ との積をとれば事象の反応率になるような量であり，

$$N\ (\text{反応事象率/sec}) = L \cdot \sigma \tag{7.7}$$

で定義される．単位は/cm^2/sec である．σ は自然の摂理で決まる量で，人為的に制御できる量ではないが，輝度は操作可能な量である．反応事象数は輝度に比例し増加するので，輝度が統計精度を決める．雑音が大量に存在するときは，雑音除去のためのフィルターを通すが（通常は，種々の変数分布において切断を施す），たいていの場合，欲しい信号も少しは排除されるので，望む信号が生き残る割合は雑音が大きいほど小さくなる．ルミノシティは十分な信号数を確保できるかどうかを決める重要な量である．コライダーの輝度は，次式により与えられる[6]．

$$L = \frac{N_1 N_2 f}{n_b A} \tag{7.8}$$

N_1, N_2：加速器内に存在するビーム粒子の総数

f：粒子の回転周波数

n_b：1周の中のバンチ数（ビームは連続でなく，束（バンチ）となって存在する）

A は，ビームの衝突点での面積を表す量で，

$$A=\sqrt{\varepsilon_x\beta_x}\sqrt{\varepsilon_y\beta_y} \tag{7.9}$$

で定義される．x, y をビームに垂直な平面の座標として，β_x は衝突点での x 方向のビーム振幅である．ε_x はビームのエミッタンスと呼ばれる量で，加速粒子の x 方向の振幅 β_x と，ビーム軸となす角 $\beta'_x\equiv \mathrm{d}\beta_x/\mathrm{d}z$（$z$ はビーム方向の座標）の 2 次元空間で，粒子の占める面積として定義される量である（$\varepsilon=\int\beta'\mathrm{d}\beta$）．電子型と陽子型では達成可能なルミノシティが多少異なるが，実用的には，$L=10^{30}\sim10^{32}$ が達成されており，将来計画では，$10^{33}\sim10^{34}$ を目指す．

固定標的の場合の反応率 N (/sec) は，入射粒子数を N_{in} (/sec)，標的粒子数を N_{tgt} とすると，

$$N=N_{\mathrm{in}}\cdot\sigma\cdot N_{\mathrm{tgt}}=N_{\mathrm{in}}\cdot\sigma\cdot\rho\cdot l\cdot N_{\mathrm{A}} \tag{7.10}$$

ρ：標的の密度（gr/cm^3）

l：標的の長さ（cm）

N_{A}：アヴォガドロ数

であるので，

$$L=N_{\mathrm{in}}\cdot\rho\cdot l\cdot N_{\mathrm{A}} \tag{7.11}$$

となる．典型的な例として，$\rho=10$ gr/cm^2，$l=1$ cm，$N_{\mathrm{A}}=6\times10^{23}$，$N_{\mathrm{in}}=10^7$(2 次ビーム)$\sim10^{12}$(1 次ビーム) とすると，$L=10^{32}-10^{37}$ となる．したがって，固定標的の方が輝度は概して大きい．衝突型加速器でもトリスタン以下のエネルギー ($\sqrt{s}\leqq30$ GeV) では，断面積が十分大きく，輝度はそれほど問題にはならなかった．e^+e^- 反応の基準となる電磁相互作用による $e^+e^-\to\mu\bar{\mu}$ の全断面積 $\sigma_{\mu\mu}$ は，

$$\sigma_{\mu\mu}=\frac{8\pi}{3s}=\frac{87(\mathrm{nb})}{s(\mathrm{GeV}^2)}\sim\frac{10^{-31}}{s}(\mathrm{cm}^2) \tag{7.12}$$

であり，トリスタンのエネルギー ($\sqrt{s}=60$ GeV)，輝度 $L=10^{31}$ cm^2/sec では，約 1 時間に 1 個の反応数を与える．1 年の実効運転時間を 10^7 秒と仮定すると，約 3000 例得ることができる．しかし，素粒子（クォークやレプトン）の素過程の断面積は s に反比例して小さくなるので，これ以上エネルギーが上がると，欲しい反応の断面積にもよるが，必要な事象数を確保しにくくなる

のである．

S/N 比 陽子はクォークの複合体であるので，衝突に際し，不要な生産物を大量につくる．そのため陽子衝突型加速器（pp もしくは $\bar{p}p$ 反応）は，電子衝突型加速器に比べクリーンな（信号対雑音比＝S/N 比が大きい）実験を行うのが困難である．ハドロンコライダーでは，全反応断面積が $\sigma \sim 100$ mb (10^{-25} cm^2) くらいあり，しかも大部分は新物理とは縁のないいわゆる柔らかい過程*2) である．これはハドロンの中のクォークもしくはグルーオンが，相手の周辺部をかすめて飛び，前方向にジェットを生成する過程であり，興味ある過程に対して雑音信号を与える．例えば，建設中の LHC（＝large hadron collider ; $\sqrt{s}=16$ TeV : CERN 欧州）におけるヒッグス粒子生成断面積は 10^{-35} cm^2 程度であり，さらに信号とすべきレプトン対への崩壊分岐比が 10^{-4} 程度であるので，信号対雑音比 (S/N 比) は 10^{-14} にもなる．

一方，電子衝突型加速器では，種々の反応の断面積が，ミューオン対生成断面積 $\sigma_{\mu\mu}$ を基準として，おおよそ $10^{-1} \sim 10^{-2}$ の程度であり，ハドロン生成全断面積は 3〜4 程度であるので S/N 比では圧倒的に有利である．一般的にいうと，電子衝突型加速器は，加速器の全エネルギーがそのまま有効に使えること，偽信号となる背景雑音が少ないことなどの利点がある．しかし，円形電子加速器ではシンクロトロン放射（後述）が大きくて，高エネルギー高ルミノシティを達成することが技術的に困難である．簡単にいえば，陽子型では測定器に工夫を要求され，電子型では加速器技術が実験可能性を制限する．現在までに提案された TeV 領域の物理が可能な加速器は陽子衝突型に限られるが，TeV 級の電子型コライダー実現を目指して活発な R&D が行われている．

7.1.2 各 種 加 速 器

1 GeV 以上のエネルギーにまで加速するには，1 種類の加速器では困難で，数種類の加速器を段階的に使用する．最終段の加速器は，米国スタンフォード加速器センター（SLAC ; Stanford Linear Accelerator Center ; 米カリフォルニア）の線形加速器を唯一の例外として，すべて円形のシンクロトロン加速器

*2) クォークの静止系で低いエネルギーの粒子を放出する過程．または横方向運動量の小さい (≲1 GeV) 粒子放出過程．

である．円形加速器は磁石で加速粒子を円軌道内に閉じ込め，加速管を1カ所に置いて粒子が通過するたびに加速する．一つの加速管で何度も加速できるので，効率が良くコストが軽減できる利点がある．

まずイオン源から得た電子もしくは陽子を，静電型加速器（通常コックロフト-ワルトン加速器）で，数百 KeV まで加速し，次に線形加速器で数百 MeV まで加速した後，シンクロトロンに入射する．最終到達エネルギーに対する入射エネルギーの比が小さいとビーム損失が大きく効率が悪いので，2段階の円形加速器を使用することもしばしばある．この場合最初の円形加速器をブースターもしくはアキュームレーター，最終段の円形加速器を主リングと呼ぶ．

a. コックロフト-ワルトン加速器

静電圧型加速器であり，図7.1のような構造をしている．コンデンサーに充電するときは並列結合となり，放電するときは直列結合となるようにダイオードを配置し，電圧を増大する工夫をしている．加速管を図のように配置し，イオン源から出た荷電粒子を加速する．高エネルギー物理学研究所の陽子前段加速器では 750 KeV まで陽子を加速している．

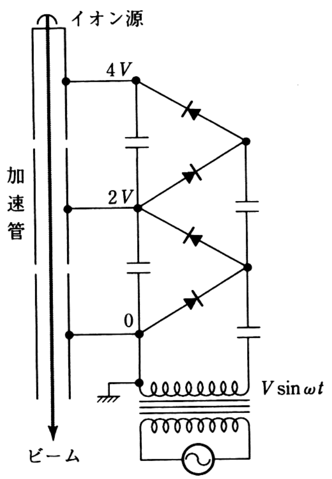


図 7.1　コックロフト-ワルトン型加速器
充電するときは並列に，放電するときは直列になるように配線し倍増電圧を得る．

b．線形加速器

コックロフト-ワルトン装置で加速された陽子は線形加速器の中に入射される．線形加速器は一連の空洞管（銅でつくった円筒）に，高周波発振器（RF generator）で，交互に電圧をかけられるようになっている（図7.2参照）．粒子が空洞の中を通過するときは負の加速電圧になるようにして（空洞で遮蔽されるので粒子は感じない），空洞を出るところで正の加速電圧がかかるように周期を合わせる．入射陽子は連続ビームであるが，タイミングの合う粒子のみ加速されるので，陽子は不連続の束（バンチ構造）となって出てくる．加速されるたびに速度が大きくなるので，空洞は順次長くなる．加速電圧はメートルあたり数 MeV であり，最終段では 100～200 MeV のエネルギーとなる．電子の場合は数 MeV 加速するとほぼ光速になるので，1～2 m 後は個々の長さは一定でよい．電子加速器の最大のものは，米国スタンフォード線形加速器センター（SLAC）にある $\sqrt{s}=90(45+45)$GeV の線形加速器 SLC で，長さ 3 km，230 個のクライストロン（高周波発振器）を使い，毎秒 60 回電子と陽電子ビームを衝突させる．なお陽電子を得るには，電子をある程度加速したところで（SLAC の場合 34 GeV），物質に照射して陽電子を発生させてから元に戻し，同じ加速管で半周期ずらして加速する．

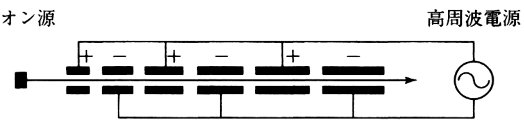


図 7.2　陽子線形加速器原理図
陽子が二つの空洞管の間隙にあるときは加速するような電圧が働き，減速電圧のときは空洞の中を走るようにする．加速されるに従い，陽子速度が増すので加速管も次々と長くなる．

c．円形加速器

i）サイクロトロン　一様磁場の中では荷電粒子は円運動をする．磁場 B が存在するとき，質量 m，電荷 e，運動量 p の荷電粒子が半径 R の円軌道を描くとすると，磁力が中心力を提供するという式は，

$$\frac{mv^2}{R}=evB \tag{7.13}$$

$$p\,(\mathrm{GeV}) = mv = eBR = 0.3BR\ (\mathrm{tesla \cdot m}) \qquad (7.14)$$

であるので，運動量に比例して円軌道の半径が大きくなる．この式は m を速度に依存する相対論的質量と見なせば（$m \to m/(1-\beta^2)^{1/2}$），相対論的エネルギーでも成立する．このとき回転角周波数 ω は

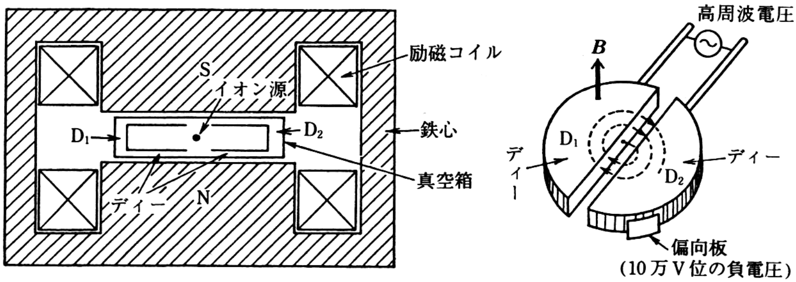
$$\omega = 2\pi \frac{v}{2\pi R} = \frac{eB}{m} \qquad (7.15)$$

で与えられる．これをサイクロトロン周波数という．$v \ll c$ の場合は $m=$一定であるから，B を一定にしておけば ω もまた一定である．そこで図7.3のように一様磁場の中に中空の円盤を二つに割ったような形をしたDEE（ディー）を2個向かい合わせにした加速空洞に一定の高周波電圧をかければ，荷電粒子は中心から出発して，円運動を行い，加速空隙に現れるたびに加速される．軌道半径 R は加速されるたびに大きくなるが，加速空隙に現れる周期は一定で常に加速されるようになっている．

ii）シンクロトロン　エネルギーが大きくなり相対論的になると，ω は一定ではなくなるし，また R が大きくなり費用がかさむ．そこで，$R=$一定の円形軌道のみを使用することにし，エネルギーが増加するのに合わせて，B を増大させるのがシンクロトロンである．一定の軌道を保持するためにはある程度のエネルギーが必要なので，シンクロトロンには前段加速器（通常線形加速器）が付随する．この場合，粒子を円軌道に保つための磁石は2極電磁石であり，図7.4 (a) のような形，またはこれを中央で切断したC型の形をしている．加速管は高周波空洞（RF cavity）で，円周の1カ所または数カ所に置き，粒子が周回してくる時間に合わせて加速電圧が上がるようにする．現時点で可能な技術では，磁場は常伝導で〜1.4テスラ，超伝導で $\lesssim$ 3(TEVATRON)〜10(LHC) テスラに限られるので[*3]，半径が1km（フェルミ研究所のTEVATRONの大きさ）とすると，常伝導で，$E \sim 400$ GeV，超伝導で〜900 GeV になるのである．つまり最高エネルギーに比例して加速器は大きくなる．ビームエネルギー400 GeV とすると，周期は約 2×10^{-5}

---

*3)　研究室レベル，すなわち小さな体積や短時間に限れば，数百テスラの強磁場を得ることができる．ここでは，大容積を被うことができかつ長時間安定動作が可能という工業的条件を付けている．



（a） サイクロトロン断面図　　（b） ディーおよび偏向板の見取図

図 7.3 サイクロトロン原理図

(a) 断面図．ディーという二つの電極板 (b) が，静磁場の中に置かれる．
(b) 2個のディーに高周波電圧を掛け，粒子がディーの間隙に出るときに加速する．軌道半径はだんだんと大きくなるが，回転周波数は一定である．

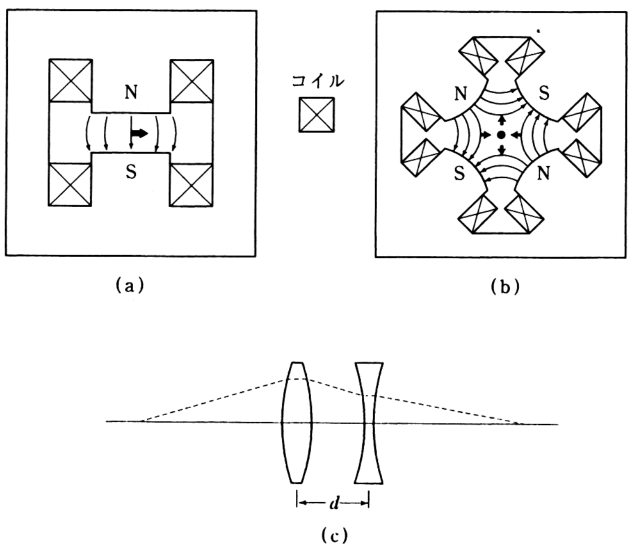


図 7.4 シンクロトロン軌道用電磁石の断面積と収束原理

(a) 2極電磁石，(b) 4極電磁石
細線矢印は磁力線を示し，太い矢印は正電荷粒子に働く磁力の向きを示す．2極電磁石では常に一方向に働き，円軌道をつくる．4極電磁石では，図では水平方向に収れん，垂直方向には発散力となるが，2台組み合わせると水平，垂直方向とも収れんする．
(c) 等しい焦点距離をもつ凸レンズと凹レンズの組み合わせは全体として収れん作用をもつ．

秒であり，1回にだいたい1 MeV加速するので，最終エネルギーに到達するまでに～10^5回も回ることになり，加速し終えるまでに数秒かかる．線形加速器に入射するときは連続であったビームは，最終エネルギーに到達したときは集束作用で，長さ～1 mmくらいの粒子集団が何個も不連続に連なるバンチ構造をしている．

d．ビーム安定性

i）ベータトロン振動　ビームを何回回しても，軌道からずれないようにするには安定条件が必要である．中心軌道を中心に，縦横の振動をするのがベータトロン振動であり，加速周期に合っている粒子（の位相）を中心に，軌道方向に早くなったり遅くなったりの振動をするのが，シンクロトロン振動である．こうした中心軌道からのズレは，そもそも入射ビーム自身が広がっていることや電磁石のつくる磁場が必ずしも一様でないことから発生する．

ベータトロン振動で発振しないように軌道上にとどめる役をするのが4極電磁石である．これは図7.4 (b) のような構造をしており，図の配置では x 方向には集束（focus ; F），y 方向には発散（defocus ; D）させるようにビームの軌道を曲げる．4極電磁石は光学での凹および凸レンズに相当する．2個の光学合成レンズの焦点距離と同じく，2個の4極電磁石を d だけ離して置いた場合の全体の焦点距離は

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1 f_2} \tag{7.16}$$

で与えられるから，例えば $f_1=-f_2=f$ とおけば，$F=d/f^2$ となるので，2個の4極電磁石を組み合わせることにより，x, y 方向ともに集束効果をもたせることができる（図7.4 (c)）．シンクロトロンの電磁石配置は2極電磁石を円軌道に沿って並べ，4極電磁石をFDFDFD……のようにして，適当に2極電磁石の間に分配する形となっている．

ii）位相安定の原理　シンクロトロン振動の場合は，加速管地点での加速電圧を時間の関数としてみると図7.5のようになる．いま，O点を周期のあっているビームの中心点とすると，やや早く到着した粒子（E）は，強い加速電圧を受けるから軌道半径が大きくなり，次には遅れ（E′）て到着する．同様にやや遅れて到着した粒子（L）は弱い加速電圧を受けるから，軌道半径が

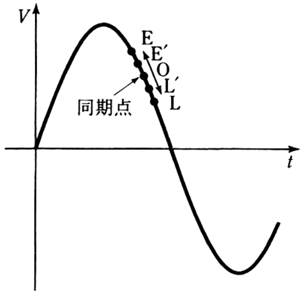


図 7.5 シンクロトロン振動と位相安定性
回転周期と加速周期が合っている点を O とする．早く (E) [遅く (L)] 着く粒子は，大きな (小さな) 加速を受けるので軌道半径が大きく (小さく) なり 1 周するのに余計 (少ない) 時間がかかるので，次にはより遅く (E′) [早く (L′)] 到着する．

小さくなり次には早く (L′) 到着する．全体として O 点を中心に振動し安定が保たれる．次に述べるシンクロトロン放射には，ベータトロン振動やシンクロトロン振動の振幅を小さくする作用があり，ビーム安定性を向上させる効果がある．

e. シンクロトロン放射

エネルギーは半径に比例して無限に大きくできるわけではなく，シンクロトロン放射による損失の補償が技術的な制約となり，コストとともにエネルギーの上限を大きく制限する．シンクロトロン放射とは，荷電粒子が磁場によって曲げられると光を放射する現象のことで，1 周あたりのエネルギー損失 ΔE は

$$\Delta E = \frac{4\pi\alpha\hbar c\beta^3\gamma^4}{3R} \tag{7.17}$$

$$\beta = v/c, \qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = E/mc^2$$

で与えられる．電子の場合は $\Delta E(\mathrm{MeV}) \sim 0.0885\mathrm{E(GeV)}^4/R(m)$ となる．エネルギーが増大するとエネルギー損失はエネルギーの 4 乗で飛躍的に増加するのである．このシンクロトロン放射は，ほぼ単色で方向のよく揃った質の良い短波長の光を提供するので，最近は物性研究 (放射光科学) におおいに役立っているが，高エネルギーに加速する立場からは損失である．同じエネルギーならば，電子の方が陽子に比べて $(m_{\mathrm{p}}/m_{\mathrm{e}})^4 \sim 10^{13}$ もエネルギー損失が大きい．

円形電子加速器の到達エネルギーが同時代の陽子加速器に比べて，常に～1/10であるのはこの理由による．このため歴史的にみて，陽子加速器がエネルギーで先行するため発見機としての役割を果たし，電子加速器がそのクリーンさゆえに精密測定器としての役割を果たすことが多かった．

f．リニアコライダー (linear collider；電子線形衝突型加速器)

シンクロトロン放射によるエネルギー損失は，その分余計に加速することによって補ってやる必要がある．たとえば，トリスタン電子陽電子衝突型加速器は，ビームエネルギー 30 GeV（$\sqrt{s}$ =60 GeV）で，曲率半径 250 m であるので，エネルギー損失は 1 周～290 MeV である．この大きな損失は，日本では余裕のある土地が確保できず，エネルギー対半径比がそれまでの加速器の常識を破る高い値となっていることに起因する．これを補うために加速空洞を超伝導化し，かつ多重連結して加速管の長さを大きくしている．このため主リングは，円形というよりは長い直線加速部を小さな円弧でつなげた四角に近い形となっている．欧州の総合原子核研究所 (CERN) の LEP 100 (large electron positron collider ; 50＋50 GeV) は，ビームエネルギーが 50 GeV で軌道半径を 3096 m と非常に大きくとっている．このためトリスタンに比べ γ の増加による因子が，$(5/3)^4$～8 倍になるにもかかわらず，エネルギー損失は 1 周～140 MeV でトリスタンの半分である．高周波加速は技術的に非常にむずかしくコストもかかるので，円形型の電子加速器は LEP 200（ビームエネルギーを 2 倍にして，$\sqrt{s}$ =200 GeV とする増強計画）が限界であろうといわれている．したがって，LEP 200 以上のエネルギーに電子を加速するにはシンクロトロン放射のない線形加速器（リニアコライダー）にする必要がある．

現在 SLAC では，$\sqrt{s}$ =90 GeV（ビームエネルギーは 45 GeV）のリニアコライダーが稼働している．このエネルギーでは，リニアコライダーが円形コライダーに比べ必ずしも有利というわけではないが，TeV 領域の加速器タイプとしてはほかに選択の余地はなく，日米欧ソで開発競争が行われている．リニアコライダーの問題点は，

（1） 円形加速器と違い，一つの加速管では一度しか加速できないので，単位長さあたりの加速性能を大きくすることが必要である．現在の加速管の加速

能力～1 MeV/m に比べて，～100 MeV/m にする必要があるとされている．この場合，1 TeV に加速するには 10^6/100 m＝10 km の長さを必要とする．

（2） 衝突も 1 回きりであるので，衝突確率を向上させるためにはビームサイズを～0.1 ミクロン程度以下に絞る必要がある．

（3） (2) に付随することであるが，0.1 ミクロンの精度を 10 km にわたり制御する技術の開発などである．

日本では，当初 $\sqrt{s}$＝600 GeV，最終的には 1～2 TeV を目指す線形加速器 JLC (Japan linear collider) 計画の R&D が進行中である．

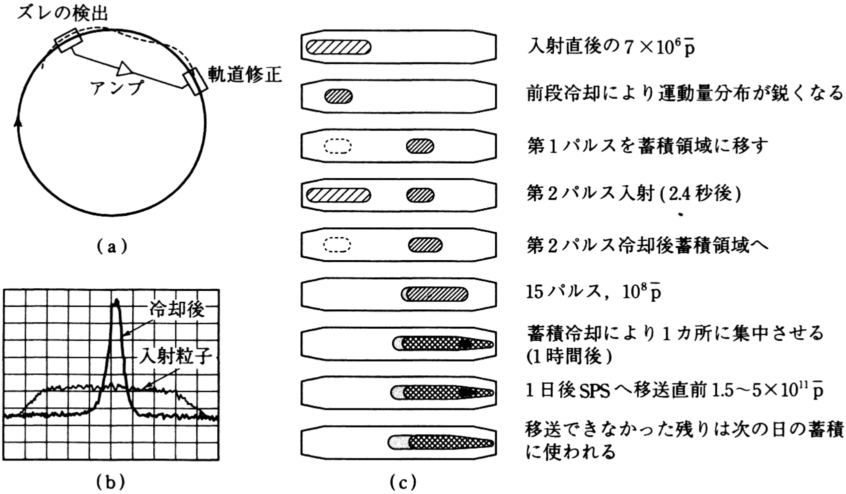


図 7.6　反陽子冷却蓄積例[7)]

(a)　反陽子の軌道軸からのずれ (ベータートロン振動) を検出し，アンプを通して磁石に戻し軌道を修正する．

(b)　AA (反陽子貯蔵器) への 7×10^6 個の入射粒子が，前段冷却により集束する様子．入射直後と 2 秒後のプロフィール．

(c)　AA の中のビーム変遷状況．

g．反陽子加速器とビーム冷却[7)]

衝突型加速器のルミノシティは，(7.8) で与えられる．L を大きくするには N/n_b を大きくし，$(\varepsilon_x\beta_x)^{1/2}$，$(\varepsilon_y\beta_y)^{1/2}$ を小さくする必要がある．最初につくられた陽子陽子衝突型の ISR[*4)] では，$N\approx10^{12}$ に対し $L\approx10^{31}\ \mathrm{cm^{-2}s^{-1}}$ を得て

*4)　CERN；26 GeV の陽子加速器 PS を入射器とした 26＋26 GeV の陽子衝突型加速器．

いた．一方，陽子反陽子衝突型加速器で，陽子と対抗する反陽子は陽子ビームから2次的につくらねばならないが，加速に適した性質をもつ反陽子の生成率は，1個の入射陽子あたり$\sim 10^{-6}$と非常に小さい．そこで十分な数を得るために繰り返し反陽子をつくり貯蔵する．陽子加速器では1秒あたり10^{13}の陽子を加速することが可能であるから，反陽子が1日で$\sim 10^{11}$貯められる．つくられた反陽子は運動量が乱雑な分布をしていて加速に適さない．速度が乱雑な状態に近いからいわば温度が高い状態にある．これを一定の速度に揃えることによって，ビーム束の大きさを小さくし粒子密度を高くする必要がある．この様子はあたかもガスを冷やすことになぞらえられるのでビーム冷却と名付けられる．ビーム冷却には電子冷却と統計冷却 (stochastic cooling) がある．CERN における陽子反陽子衝突型加速器 (S$\bar{\text{p}}$pS) で使われたのは統計冷却の方法であり，これはビーム中の粒子の中心点からのズレを知り，アンプを通して粒子が通過するところの磁石に粒子に先回りして入力し，軌道を補正するやり方である (図 7.6 (a))．軌道補正はビーム進行方向の位置についても行う．図 7.6 (b) にこうして冷却されたビームのプロフィールを示す．入射時に比べて，ビーム特性が大幅に改良されているのがわかる．

図 7.7 には，CERN で W 粒子生成のため $\bar{\text{p}}$p 衝突に用いられた加速器群の構成を示す．まず10^{13}個の陽子が，2.6 秒ごとに PS (26 GeV の陽子シンクロトロン) で加速され，外に引き出されてタングステンの標的に当てられる．ここでつくられた反陽子のうち5×10^6個だけが AA (antiproton accumulator) に受け入れられる．AA は，ほぼ 3.5 GeV の反陽子 (このエネルギーで生成率が最大) を受け入れるように調節されている．AA は間隙の大きな固定磁場よりなり，開閉可能なシャッターにより入射用と貯蔵用の2室に別れている．24 時間で1.6×10^{11}個の反陽子が貯蔵，冷却される (図 7.6 (c))．このうち高周波移動加速に乗れる0.6×10^{11}個が取り出され，PS に送り戻されて 26 GeV まで加速され次いで最終段の SPS に移された後，陽子とともに 270 GeV まで加速され，衝突点で陽子と反陽子が衝突する．ビーム冷却技術の実現によって，W, Z 発見の早期実現が可能となったのであった．この技術的な功績でヴァン・デア・メーア (S. van der Mear) は，物理学者ルビア (C. Rubbia) とともにノーベル賞を授賞している．物理的業績を対象とするノーベル物理学賞

を，技術者が受賞するのは珍しいことである*5)．

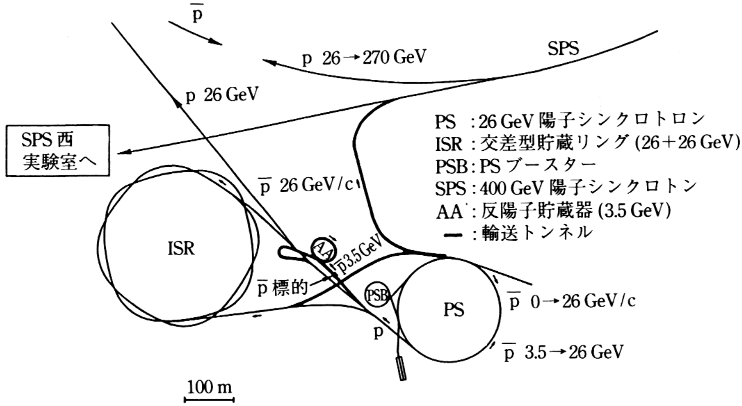


図 7.7 p̄p コライダー加速器群 (CERN の Sp̄pS) のレイアウト[7)]

(1) 26 GeV の陽子シンクロトロン (PS) で加速された陽子が引き出された後，標的に当てられ反陽子をつくる．
(2) 反陽子は AA に受け入れられ冷却貯蔵される．
(3) 冷却された反陽子は PS へ戻されて 26 GeV まで加速された後最終段階の SPS に移された後，陽子とともに 270 GeV まで加速され衝突点で衝突する．

7.2 粒子と物質との相互作用[8~10)]

測定器とは特定の検出物質を用いて，測定器への入射粒子と反応を起こさせて，粒子のエネルギー，空間位置，時間応答などの種々の情報を得る道具のことである．個々の測定器の議論をする前に，粒子と物質との相互作用について一般的な知識を得ておくと役に立つであろう．粒子は相互作用の性質により大きく二つに分けられる．強い相互作用をするハドロンと，電磁相互作用のみをする粒子（電子，フォトンおよびミューオン）である．弱い相互作用は測定器の観点からは無視できる．ニュートリノは後に述べるようにみえないエネルギーとして検出する．いま，エネルギーが一定の値 E をもち，方向のそろった強い相互作用をする粒子が薄い物質を通り抜けると，物質中で強い相互作用

*5) 同様な例としては 3 K の背景放射発見におけるペンジアス (A. Penzias) がいる．最近は物理成果につながる画期的な技術開発の重要性が認識されていて，1992 年には，チャルパック (G. Charpak) が比例計数箱の測定器技術でやはり物理学分野で受賞している．

をするか（図 7.8 (a)），または電磁相互作用をする（図 7.8 (b)）．強い相互作用は，エネルギーが低ければ弾性散乱が大きいが，われわれが問題にするような高エネルギー（$E \gg m_p c^2$; m_p は陽子質量）では，一般に数個の 2 次粒子を放出する非弾性散乱である．この場合，元の粒子の立場からは粒子が物質と相互作用をして吸収されたと見なす．電磁相互作用の場合は，元の粒子はほぼそのままの形ででてくるが，原子中の電子を跳ね飛ばすことによるイオン化エネルギー損失（$E \to E - \Delta E$）と原子核の電場による多重散乱（$\theta \to \theta + \Delta\theta$）を受けている．

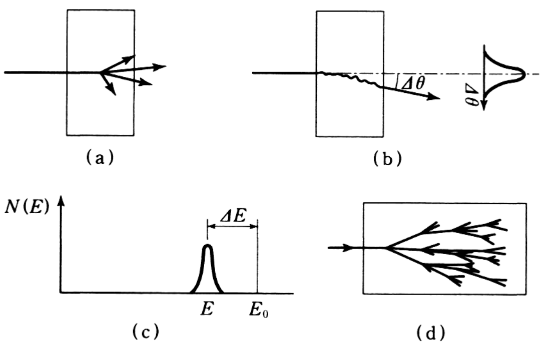


図 7.8 粒子と物質との相互作用
(a) 強い相互作用によって原子核と反応する（消滅）．
(b) 電磁相互作用：イオン化損失により入射前は $E=E_0$ とエネルギーのそろっていた粒子は，物質通過後は $E=E_0-\Delta E$ を中心に統計的にゆらぐ (c)．また多重散乱により方向もまた $\Delta\theta$ だけずれる．
(d) シャワー現象

7.2.1 衝突長と吸収係数

断面積 反応頻度を与える量をいくつか定義しておく．衝突断面積 σ は，単位面積あたり 1 個の粒子が入射し，衝突すべき標的粒子が単位体積中に 1 個存在するときの衝突確率と定義される（図 7.9）．σ は面積の次元をもつが，m^2（平方メートル）は単位として大きすぎるので，

$$1\,\mathrm{barn} \equiv 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2 \tag{7.18 a}$$

を使う．これでも大きすぎるので，

$$1\,\mathrm{mb}\ (\text{ミリバーン}) \quad = 10^{-3}\,\mathrm{barn} = 10^{-27}\,\mathrm{cm}^2$$

$$\begin{aligned}
&1\,\mu\text{b (マイクロバーン)} &&= 10^{-6}\,\text{barn} = 10^{-30}\,\text{cm}^2 \\
&1\,\text{nb (ナノバーン)} &&= 10^{-9}\,\text{barn} = 10^{-33}\,\text{cm}^2 \\
&1\,\text{pb (ピコバーン)} &&= 10^{-12}\,\text{barn} = 10^{-36}\,\text{cm}^2 \\
&1\,\text{fb (フェントバーン)} &&= 10^{-15}\,\text{barn} = 10^{-39}\,\text{cm}^2
\end{aligned} \tag{7.18 b}$$

もよく使われる．

粒子 A と粒子 B とが衝突して C と D になる過程を弾性散乱と呼び，粒子種が変わるとき（C≠A, D≠B, 例；$\pi^- p \to K^0\Lambda$）を準弾性散乱と呼んで区別することがある．3 個以上の粒子群 C, D, E, … が生成されるときは非弾性散乱という．全衝突のうちで，C+D が生成する割合（分岐比；branching ratio）を BR(CD) とすると，A+B → C+D 反応の断面積を，

$$\sigma(A+B \to C+D) = \sigma_{TOT} \cdot BR(CD) \tag{7.19}$$

と書く．

衝突の結果生じた 2 次粒子の角分布がしばしば貴重な情報をもたらす．標的粒子の数が単位体積あたり 1 個あり，単位面積あたり 1 個の粒子が入射するとき，散乱角 θ，方位角 ϕ 方向の単位立体角に散乱される確率を微分断面積といい $d\sigma/d\Omega$ で表す．明らかに

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta\, d\theta d\phi \tag{7.20}$$

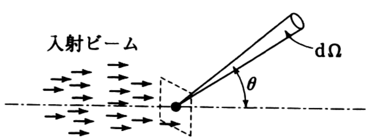


図 7.9　微分断面積の定義

粒子の束が単位面積あたり毎秒 N_{in} 個入射するとき，標的粒子数 1 個につき θ, ϕ 方向の立体角 $d\Omega$ 中に散乱される粒子の数を毎秒 dN 個とすると

$$dN = N_{in} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) d\Omega$$

さて，入射粒子数を N_{in} (/sec) とし，単位体積あたり n_t 個の物質粒子数があるとき，物質中を長さ d 進む間に衝突する数は

$$\text{衝突数} = N_{in} \cdot \sigma_{TOT} \cdot n_t \cdot d \tag{7.21}$$

したがって，1 個の粒子が平均として 1 回衝突するのに必要な長さ＝平均自由

行程 λ は,

$$\lambda=1/(n_t\sigma_{TOT})=1/(\sigma_{TOT}\rho N_A) \tag{7.22}$$

で与えられる. λ は衝突長とも呼ばれる*6). ここに ρ は物質密度 (gr/cm^3). $N_A(=6.023\times10^{23}/\mathrm{gr})$ はアボガドロ数である.

強い相互作用, 例えば, π-陽子散乱の断面積は, π のエネルギーが 10 GeV を超えると～25 mb の大きさとなるので, 平均衝突長は, 密度 1 gr/cm^3 の物質中で, ～67 cm くらいである. イオン化以外の電磁相互作用による散乱は, 陽子によるトムソン散乱を例にとれば ($\sigma=(8\pi/3)\alpha^2(\hbar/m_pc)^2\sim0.2\ \mu$b), 平均衝突長は～100 km くらいである. 弱相互作用による散乱は, 太陽ニュートリノを例にとれば, 平均エネルギー～1 MeV であり, ニュートリノを吸収して電子を放出する逆 β 崩壊反応の断面積は～10^{-44} cm^2/atom であるので, 衝突長は密度～1 gr の物質で, ～180 光年となる. したがって, 衝突長は, 相互作用を区別する一つの目安となる. 測定器でよく使われる例は, 例えばハドロンによる鉄の衝突長 (吸収長) ～10.5 (16.8)cm という数字がカロリメターの設計に際して必要となる.

粒子は通過路の中に存在する物質と衝突して失われていくが, その率は, 物質の厚さが十分薄ければ物質の厚さに比例するであろう. 1 個の粒子が微小距離 dx 進む間に衝突する確率は dx/λ であるから, 当初 N 個存在した粒子のうち dN 個失われるとすれば,

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=-\frac{\mathrm{d}x}{\lambda}=-k\mathrm{d}x \tag{7.23 a}$$

k は, 吸収係数と呼ばれる量である. この式を解けば

$$N=N_0\exp(-kx)=N_0\exp(-x/\lambda) \tag{7.23 b}$$

物質の厚さを長さでなく単位長さあたりの重さで表す方が実験的には便利であることが多い. また単位時間, 単位面積あたりに入射する粒子数のことを, 粒子束 (flux) といい I で表すと,

$$I=I_0\exp(-\mu\xi) \tag{7.24}$$

$$\xi=\rho x,\quad \mu=(\lambda\rho)^{-1}$$

ρ は密度で, μ は質量吸収係数と呼ばれる.

---

*6) 非弾性散乱のみで定義するときもあり, そのときは吸収長と呼ぶ.

強い相互作用の目安を手軽に得るには，次のように考察する．陽子など核子は，π 中間子のコンプトン波長 ($\lambda_\pi=\hbar/m_\pi c\simeq1.4\times10^{-13}$ cm) の半分くらい広がっている（式 (12.32) 参照)．原子質量 A の原子核は半径 $r=A^{1/3}\lambda_\pi$ をもつ球とみなせるが，入射粒子は表面で反応してしまい中にまで入らないので，入射粒子からみると半径 r の円盤のようにみえる．

$$\sigma_A=\pi(\lambda_\pi/2)^2A^{2/3}\simeq1.6\times10^{-26}A^{2/3}\ \mathrm{cm}^2 \tag{7.25 a}$$

を，幾何学的断面積といい物質の断面積の一つの目安となる．ただし，実際には，実測の $\sigma(\pi p)$ に合わせて

$$\sigma_A=2.5\times10^{-26}A^{2/3}\ \mathrm{cm}^2 \tag{7.25 b}$$

とするのが実用上より現実的であろう．

7.2.2　イオン化損失

a.　単位重量あたりのエネルギー損失 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\xi$

荷電粒子が物質中を通過する際に，物質をイオン化してエネルギーを失う過程は，測定器の動作現象中最も基本的なものである．この過程を物理的に理解しておこう．電子は原子に束縛されていて静止状態ではないが，この運動は十分遅いから近似的に止まっていると考えてよい．電荷 ze の荷電粒子が物質中を速度 v で通過するとき，質量 M が電子の質量 m に比べて十分重いならば ($M\gg m$)，荷電粒子の電子を跳ね飛ばすときの反跳は無視できて，直線上を動くと想定してよい．以下，可能な限り§5で学習した場の量子論を使用して計算を試みる．計算段階では自然単位を使用し，最後の結果には $\hbar$ と c を入れて次元を復活させることにする．$j_e{}^\mu$ を電子のつくるカレント，$j_m{}^\mu$ を荷電粒子のつくるカレントとすれば，散乱の遷移振幅は (5.64) を参照して

$$\begin{aligned} iT_{fi}&=-ze^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\langle f|\,T[j_e{}^\mu(x)A_\mu(x)j_m{}^\nu(y)A_\nu(y)]|i\rangle \\ &=-ze^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\langle f|j_e{}^\mu(x)|i\rangle\langle 0|\,T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle\langle f|j_m{}^\nu(y)|i\rangle \end{aligned} \tag{7.26 a}$$

電子部分の行列要素は，始（終）状態のエネルギー運動量を，$p_i=(m\,;\mathbf{0})$，$p_f=(E_f\,;\boldsymbol{p}_f)$ とすれば，

$$\langle f|j_e{}^\mu(x)|i\rangle=\bar{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i)e^{-i(p_i-p_f)x} \tag{7.27 a}$$

で与えられる．$\langle T[A_\mu(x)A_\nu(y)]\rangle$ はファインマンの伝播関数であり，(4.98)

で与えられている．

$$T\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle=-\frac{ig_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{q^2}e^{-iq(x-y)} \tag{7.27 b}$$

反跳やエネルギー損失を無視すれば，量子効果はないから荷電粒子のカレント $j_m{}^\mu$ は古典的に扱ってよく，

$$j_m{}^\mu(y)=v^\mu\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)$$
$$v^\mu=(1;0,0,v) \tag{7.27 c}$$

と書ける．積分を実行すると，x 積分は $\delta^4(q+p_i-p_f)$ となり，q 積分で1を与える．y 積分は $j_m{}^\mu$ のフーリエ変換を与える．

$$j_\omega{}^\mu=\int\mathrm{d}^4yj_m{}^\mu(y)e^{iqy}=\frac{v^\mu}{v}\int_{-L/2}^{L/2}e^{i(\omega/v-q_z)z}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{v^\mu}{v}2\pi\delta\left(q_z-\frac{\omega}{v}\right) \tag{7.28}$$

L は荷電粒子が通過する物質の長さである．これらの式を (7.26 a) に入れると，

$$T_{fi}=\frac{2\pi}{v}\delta\left(q_z-\frac{\omega}{v}\right)\frac{ze^2}{q^2}v_\mu\bar{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i) \tag{7.26 b}$$

ここに，$q^\mu=(\omega;\boldsymbol{q})=p_f-p_i=(E_f-m;\boldsymbol{p}_f)$ である．以下 $\boldsymbol{p}_f$ を単に $\boldsymbol{p}$ と書くことにする．散乱確率は遷移確率を自乗して終状態密度を掛け，始状態密度 $2E_i$ で割り，電子スピンの平均と和をとって得られる．

$$\mathrm{d}w_{fi}=\frac{1}{2E_i}\frac{1}{2}\sum_{\text{スピン}}|T_{fi}|^2\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$
$$=\frac{z^2e^4L}{16\pi E_iE_fv^2}\delta\left(p_z-\frac{\omega}{v}\right)\frac{1}{q^4}v_\mu v_\nu L^{\mu\nu}\mathrm{d}p_T{}^2\mathrm{d}p_z \tag{7.29}$$

ここで，$|2\pi\delta(p_z-\omega/v)|^2=2\pi\delta(p_z-\omega/v)\int\mathrm{d}z=2\pi\delta(p_z-\omega/v)L$ を使った．$L^{\mu\nu}$ は (5.54) で与えられている．

$$L^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_{r,s}[\bar{u}_s(p_f)\gamma^\mu u_r(p_i)][\bar{u}_s(p_f)\gamma^\nu u_r(p_i)]^*$$
$$=2\{p_i{}^\mu p_f{}^\nu+p_i{}^\nu p_f{}^\mu+(q^2/2)g^{\mu\nu}\} \tag{7.30 a}$$
$$v_\mu p_i{}^\mu=m,\qquad v_\mu p_f{}^\mu=E_f-vp_{fz}=E_f-\omega=m$$
$$v_\mu v_\nu g^{\mu\nu}=1-v^2=1/\gamma^2$$

を使えば，

$$v_\mu v_\nu L^{\mu\nu}=2[2m^2+q^2/(2\gamma^2)]=4m^2\left(1+\frac{q^2}{4m^2\gamma^2}\right) \tag{7.30 b}$$

$$-q^2=|\boldsymbol{q}|^2-\omega^2=p_T{}^2+(\omega/v)^2-\omega^2=p_T{}^2+(\omega/\beta\gamma)^2 \tag{7.30 c}$$

またイオン化損失過程で電子に与えるエネルギーは，ほとんど非相対論領域であるから，

$$E_i=m, \qquad E_f\simeq m+\frac{p^2}{2m}$$

$$\omega=E_f-E_i\simeq\frac{p^2}{2m}=\frac{p_T{}^2+(\omega/v)^2}{2m}\simeq\frac{p_T{}^2}{2m}\ll p_T \tag{7.30 d}$$

これらの式を (7.29) に代入すると，

$$\mathrm{d}w_{fi}=\frac{4\pi z^2\alpha^2 L}{v^2}\left[\frac{1}{\{p_T{}^2+(\omega/\beta\gamma)^2\}^2}-\frac{1/(4m^2\gamma^2)}{p_T{}^2+(\omega/\beta\gamma)^2}\right]\mathrm{d}p_T{}^2 \tag{7.31}$$

これに，電子に与えたエネルギー ω と電子数密度 n_e を掛けると，単位長さ当たりのエネルギー損失量 $\mathrm{d}E$ が求められる．分母の第 2 項は第 1 項に比べて小さく，$p_T=0$ で発散するところ以外は無視できるから，

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{2\pi z^2\alpha^2 n_e}{mv^2}\int_0^{p_{T\max}}\mathrm{d}p_T{}^2\left[\frac{p_T{}^2}{\{p_T{}^2+(\omega/\beta\gamma)^2\}^2}-\frac{1}{4m^2\gamma^2}\right] \tag{7.32}$$

電子に与えることのできる最高エネルギー $\omega_{\max}$ は，荷電粒子が正面衝突をして前方に跳ね飛ばすときのエネルギーである．荷電粒子の反跳をも考慮したときの ω の式は，

$$\omega=\frac{2m\beta^2\gamma^2\cos^2\theta}{(m/M+\gamma)^2-\beta^2\gamma^2\cos^2\theta} \tag{7.33}$$

で与えられる．θ は電子の散乱角である．これから $\omega_{\max}\simeq 2m\beta^2\gamma^2$ となり，対応する $p_{T\max}$ は，

$$p_{T\max}\simeq(2m\omega_{\max})^{1/2}\simeq 2m\beta\gamma \tag{7.34 a}$$

で与えられる．ω は少なくも原子のイオン化エネルギー（I）以上大きくないとイオン化できないから，$I/\beta\gamma$ が p_T の切断を与える．すなわち

$$p_{T\min}=I/\beta\gamma \tag{7.34 b}$$

$I/(\beta\gamma)$ の因子は相対論効果で横方向の電場（$E_T\propto\gamma$）の到達距離が伸びることを反映している．これらの値を入れて積分すれば

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{4\pi z^2\alpha^2 n_e}{mv^2}\left[\ln\frac{2m\beta^2\gamma^2}{I}-\beta^2\right] \tag{7.35}$$

実用上は単位重さ($\xi=\rho x$)当たりのイオン化損失を与えるのが便利で，$\hbar, c$ を入れて次元を正しく戻し，密度効果 $\delta/2$ (後述) を入れて書き下ろすと，グラム cm^2 あたりの損失は，$\beta=v/c$ として次式で与えられる[8,11].

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\xi}=D\frac{Z}{A}\left(\frac{z}{\beta}\right)^2\left[\ln\left(\frac{2m\gamma^2v^2}{I}\right)-\beta^2-\frac{\delta}{2}\right] \tag{7.36}$$

$\mathrm{d}\xi=\rho\mathrm{d}x$ (ρ は物質の密度)

$D=4\pi N_A r_e{}^2 mc^2=0.3071\ \mathrm{MeV\cdot cm^2/gr}$

$N_A=6.022\times10^{23}/\mathrm{gr}$＝アヴォガドロ数

$r_e=e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)\simeq2.82\times10^{-13}\ \mathrm{cm}$＝電子の古典半径

Z, A＝物質の原子番号と原子質量

$I\simeq16Z^{0.9}\ \mathrm{eV}$＝物質の平均イオン化ポテンシャル

δ＝密度効果を表す量で，γ の大きいところで $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\xi$ を定数に近づける作用をもつ

この式から次のことがわかる．単位重さあたりのエネルギー損失 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\xi$ は，

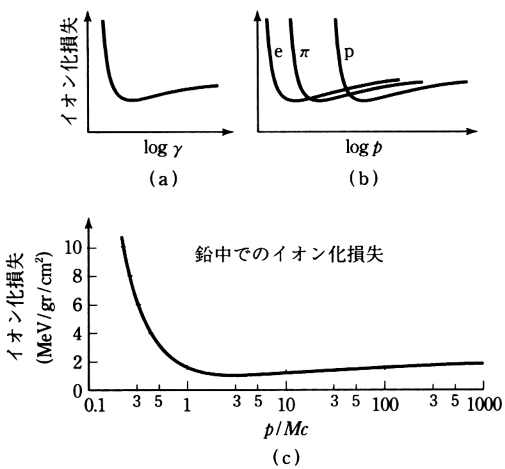


図 7.10　単位重量あたりのイオン化損失

(a)　速度 $\beta(=v/c)$ の関数とすればすべての粒子について同一.

(b)　運動量 p の関数とすれば粒子ごとに分離する.

(c)　鉛(Pb)中でのイオン化損失を $p/Mc=\beta\gamma$ の関数として描いたもの. $\gamma\simeq3$ で最小イオン化損失 (minimum ionization)$\simeq$1.5 MeV/gr/cm² となり，p の増大につれゆっくりと上昇する.

（1） Z/A に比例し，ほとんど物質によらない（$\ln I$ 依存性は小さい）．

（2） 入射粒子の速度 $\beta(=v/c)$ のみの関数である．

図 7.10 に，エネルギー損失を γ（速度の関数）の関数として，プロットする．現実の実験の場合は，粒子の速度より運動量 $p=Mv\gamma$ がわかっていることが多く，粒子の種類により曲線が別れる（図 7.10 (b)）．このときは $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\xi$ と p を知ることにより粒子の識別が可能となる．

イオン化（電離）損失は統計現象であり，実際の測定にかかる値は，(7.36) で与えられる値を中心にばらつく（ガウス分布）．特に薄い物質層を通過する場合は，1 個か 2 個の電子を大きく跳ね飛ばしただけで通過することも多く，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}\xi$ の分布はエネルギー損失の大きい方に尾を引く非対称な形となる（ランダウ分布）．β が小さいときは，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}\xi$ は $1/\beta^2$ に比例する．$\gamma\simeq 3$ あたりで最小値（minimum ionization loss；最小イオン化損失値）に達する．$\gamma\gtrsim 4$ からは $\ln\gamma^2$ でゆっくりと上昇し，やがては密度効果で飽和値に達する．非常に高エネルギーでは，強い相互作用によるハドロン反応（π，陽子など）や，電子陽電子対生成や制動放射などがイオン化損失より優勢となる（μ など）．

相対論的粒子のグラムあたりのエネルギー損失はほぼ 1.5 MeV であり，エネルギーにほとんどよらない．

という事実は覚えておくと便利である．

密度効果 $\ln\gamma^2$ 上昇の原因は，粒子の通過により電離される原子までの距離が γ に比例して大きくなる（$E_\perp\propto\gamma$）などの理由によるが，この距離内にたくさんの原子が入り込むような場合には，誘電分極による電場の遮蔽効果で到達距離は延びなくなる．これが，密度効果による平坦化の理由である．

密度効果を取り入れるとイオン化損失の式がどう変わるかを考察してみよう．物質中では電場の振動数 ω と波数 $\boldsymbol{q}$ は，誘電率を ε（ε_0 を単位），屈折率を n として分散式

$$\omega^2=|\boldsymbol{q}|^2c^2/\varepsilon=|\boldsymbol{q}|^2c^2/n^2 \tag{7.37}$$

を満たす．物質中の光の位相速度を $c_m(=c/\sqrt{\varepsilon})$，横方向の波数を q_T とすると，$q_z=\omega/v$ と (7.37) から

$$q_T=\frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\frac{v^2}{c^2}-1} \tag{7.38}$$

$\varepsilon>1$ であれば $v>c_m$ となるとき実の光が放射される（後述チェレンコフ放射参照）．イオン化過程があるときは光の吸収があるので誘電率は複素数となる．図 7.11 に 1 気圧のアルゴンの誘電率を示す[9]，今問題となるエネルギー領域，$10\mathrm{eV}\lesssim\hbar\omega\lesssim10\mathrm{keV}$ では $\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$ であり，

$$\varepsilon_1\simeq1-\frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}<1,\qquad 0<\varepsilon_2 \tag{7.39 a}$$

$$\hbar\omega_p=\hbar\left[\frac{e^2n_e}{m_e}\right]^{1/2}\simeq\left[2\frac{Z}{A}\rho(\mathrm{gr/cm^3})\right]^{1/2}\times21\mathrm{eV} \tag{7.39 b}$$

としてよい，ω_p はプラズマ周波数である．この場合 q_T は虚数となるので，電場は横方向に指数関数的に減衰する．

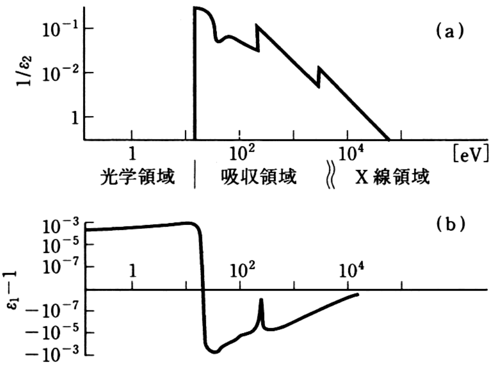


図 7.11 気体アルゴン（1 気圧）の誘電率

$\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$ とし (a) は虚数部 ε_2 を光が吸収されて消滅する距離（単位は m；$\propto1/\varepsilon_2$）で表した．(b) は実数部 ε_1-1 を描いている．横軸は光のエネルギー (eV) である．光学領域では $\varepsilon_2=0,\ \varepsilon_1>1$ で物質は透明であり，またチェレンコフ光を発することができる．吸収領域がイオン化損失に寄与する．遷移放射は X 線領域を使う．

このときの q_T は，$q_T=i\kappa$ と書いて

$$\kappa=\frac{k}{\beta'\gamma'}=\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\varepsilon\frac{v^2}{c^2}}\simeq\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{(\beta\gamma)^2}+\frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}}\xrightarrow{\beta\gamma\to\infty}\frac{\omega_p}{c} \tag{7.40 a}$$

ここに，

$$\beta'=n\beta=v/c_m,\qquad \gamma'^{-2}=1-\beta'^2 \tag{7.40 b}$$

で定義され，c_m は物質中の光速度である．したがって密度効果により飽和する段階では，$p_{T\min}$ は $I/(c\beta\gamma)$ でなく $\hbar\omega_p/c$ としなければならない．計算上は，方程式の中で，$e\to e/n,\ c\to c_m=c/n$ の置き換えをすれば物質中における式

が得られる．この結果 (7.31) の分母の第2項が κ^2 に置き換わる．場の量子論では，物質の偏極効果によりフォトンが質量を獲得したという言い方をする．$(\omega/c)^2=q^2/n^2\simeq q^2-\delta n^2 q^2=q^2+(\omega_p/c)^2$ から，質量は $\hbar\omega_p/c^2$ となる．

密度効果の現れる $\beta\gamma$ の値を見積もってみよう．密度効果を考慮しない場合の最大の横方向到達距離 $y_{\max}$ は，

$$y_{\max}=\frac{\hbar c\beta\gamma}{I}\simeq\left(\frac{20\mathrm{eV}}{I}\right)\beta\gamma\times10^{-6}\mathrm{cm} \tag{7.41 a}$$

程度である．10^{-6}cm は1気圧の気体の分子間平均距離程度である．一方密度効果で飽和したときの最大到達距離 $y_{m,\max}$ は，

$$y_{m,\max}=\frac{c}{\omega_p}\simeq\frac{1}{\sqrt{\rho}}\times10^{-6}\mathrm{cm} \tag{7.41 b}$$

となる．両者を比較すれば，飽和値に達する $\beta\gamma$ の目安は $\beta\gamma\simeq\rho^{-1/2}$ 付近であり，気体の場合は $\beta\gamma$ が100程度になるまで現れないが，液体や固体では小さな値でも大きな効果となることがわかる．密度効果があるときは考慮しない場合に比べて，(7.35) の ln の項が

$$\frac{\delta}{2}=\ln\frac{y_{\max}}{y_{m,\max}}=\ln\frac{\hbar\omega_p}{I}+\ln\beta\gamma \tag{7.42}$$

で表されるように $\delta/2$ だけ小さくなる．この式ともとの式を比較すれば，密度効果があるときは，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}\xi$ は $\ln(\beta\gamma)^2$ でなく $\ln\beta\gamma$ でしか増加しないことがわかる．

b．飛程距離 (range)

粒子が非常に厚い物質層に入ると，イオン化損失により全エネルギーを失いやがては止まってしまう．この間に通過する距離のことを飛程距離もしくは range という．粒子が最初にもっていたエネルギーを E，range を R とすると，

$$R=\int^R \mathrm{d}x=\int^E \frac{\mathrm{d}E}{\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}} \tag{7.43}$$

$E=Mc^2\gamma=Mc^2/\sqrt{(1-\beta^2)}$ で β の関数，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ もまた β のみの関数であるから，R/M もまた β のみの関数となる．(7.36) を参照すると，

$$R=\frac{M}{z^2}G(\beta) \tag{7.44}$$

の形に書ける．すなわち，rangeは入射粒子の質量に比例し電荷の2乗に逆比例する．rangeの概念が役にたつのは，イオン化以外のエネルギー損失が小さい場合であり，μ粒子または比較的低エネルギー（$\lesssim$ 数百 MeV）の原子核やハドロン（陽子，π, K中間子など）に対してである．高エネルギーのハドロンは，厚い物質中ではイオン化損失で止まる前に物質と強い相互作用をして，カスケード（連鎖）反応によるシャワー現象（図7.8 (d) 参照）を起こすので，カロリメターを使用してエネルギーを測定する．

7.2.3　多　重　散　乱

イオン化損失の項では，入射粒子は電子に比べて重いとし電子による反作用は無視した．しかし，原子核は重いので，原子核のつくる電場による散乱（ラザフォード散乱）を受ける．ラザフォード散乱の確率は $\sin^4(\theta/2)$ に逆比例するので，小角散乱である（§5.1.2 参照）．したがって有限の厚さの物質を通過するときは，小角散乱の統計的積み重ねの多重散乱となる．すなわち，

$$\langle\theta^2\rangle=\sum_i \theta_i^2 \tag{7.45}$$

この式は，何回もの散乱の積み重ねで平均散乱角がだんだん増えていくことを示している．統計現象であるので，散乱角の分布は，ほぼガウス分布となる．

散乱角を（5.60）のモット散乱公式を使って計算してみよう．小角散乱のみ効くのでスピン効果は無視できる．$|\boldsymbol{q}^2|=2p^2(1-\cos\theta)\simeq p^2\theta^2$ を使うと，

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{4Z^2\alpha^2E^2}{q^4}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\Omega\simeq\frac{4\pi Z^2\alpha^2}{v^2}\frac{\mathrm{d}q^2}{q^4} \tag{7.46}$$

1回の散乱による平均散乱角は

$$\int\theta^2\mathrm{d}\sigma=\frac{4\pi Z^2\alpha^2}{v^2p^2}\int\frac{\mathrm{d}q^2}{q^2}=\frac{8\pi Z^2\alpha^2}{v^2p^2}\ln\frac{q_{\mathrm{min}}}{q_{\mathrm{max}}}=\frac{8\pi Z^2\alpha^2}{v^2p^2}\ln\frac{r_{\mathrm{max}}}{r_{\mathrm{min}}} \tag{7.47}$$

を $\int\mathrm{d}\sigma$ で割って求められる．ここで $r_{\mathrm{max}}=1/q_{\mathrm{min}}$ は，原子核のクーロン場が電子の雲に遮蔽される距離である．r_{max} としてトーマス・フェルミの原子半径 $r_{\mathrm{atm}}=1.4a_BZ^{-1/3}=7.40\times10^{-9}Z^{-1/3}\mathrm{cm}$ を採用する．a_B はボーア半径 $((m_e\alpha)^{-1})$ である．また $r_{\mathrm{min}}=1/q_{\mathrm{max}}$ として原子核半径 $r_A=A^{1/3}m_\pi^{-1}$ を採用する．厚さ Xcm を通過すると，その間に平均として $n(n=X\int\mathrm{d}\sigma\rho N_A/A)$ 回散乱するか

ら，平均散乱角 Θ は次式で与えられる．

$$\langle\Theta^2\rangle = n\langle\theta_i^2\rangle = X\frac{16\pi Z^2\alpha^2\rho N_A/A}{v^2p^2}\ln\left[\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right]^{1/2} = \frac{E_s^2}{v^2p^2}\frac{X}{X_0} \tag{7.48 a}$$

$$E_s = m_e c^2\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} = 21.2\ \mathrm{MeV} \tag{7.48 b}$$

$$X_0^{-1} = 4\alpha\left[\frac{\alpha\hbar}{m_e c}\right]^2\frac{N_A Z^2\rho}{A}\ln\frac{183}{Z^{1/3}} \tag{7.49 a}$$

E_s は特性エネルギー，X_0 は放射長 (radiation length) と呼ばれる．より詳しい計算によれば[8,9]，平均散乱角は

$$\Theta \equiv \sqrt{\langle\theta^2\rangle} = z_{\mathrm{in}}\left(\frac{E_{\mathrm{s}}}{vp}\right)\sqrt{\frac{X}{X_0}}\left[1+0.038\ln\frac{X}{X_0}\right]^{*7)} \tag{7.48 c}$$

$$X_0 = \left[4\alpha r_{\mathrm{e}}^2\frac{N_{\mathrm{A}}Z(Z+1)}{A}\ln\frac{287}{Z^{1/2}}\right]^{-1} = \frac{(716.4\ \mathrm{g\cdot cm^{-2}})A}{Z(Z+1)\ln(287/\sqrt{Z})} \tag{7.49 b}$$

で与えられる．荷電粒子の軌跡の位置測定の精度はこの多重散乱を考慮に入れる必要がある．実際電磁場中での荷電粒子の軌跡の曲率から粒子の運動量を決める方式の精度は，低運動量ではこの多重散乱による不定性が限界となる．

7.2.4 チェレンコフ放射と遷移放射

等速運動をする荷電粒子は，真空では光を放出しないが物質中では放出できる．物理的には，荷電粒子の通過により物質が偏極し，元に戻る際に放出する双極子放射と解釈できる．遷移振幅は，

$$T_{fi} = -\langle f|\int H_{\mathrm{int}}\mathrm{d}^4x|i\rangle = \langle f|e\int A_\mu(x)j_m^\mu(x)\mathrm{d}^4x|i\rangle \tag{7.50 a}$$

$j_m^\mu(x)$ は荷電粒子のつくるカレントであり，(7.27 c) で与えられる．フォトンは量子場と見なして計算すると，

$$\langle f|A_\mu(x)|i\rangle = \varepsilon_\mu^*(\lambda)e^{ikx} \tag{7.51 a}$$

であるから，積分を実行すると $j_m^\mu \to (v^\mu/v)j_\omega$ となる．

$$j_\omega = \int e^{i(\omega/v-k\cos\theta)z}\mathrm{d}z \equiv \int_{-L/2}^{L/2}e^{iz/Z_m}\mathrm{d}z \tag{7.51 b}$$

ここで，L は通過する物質の長さであり，

*7) $\theta=\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}$ である．1次元に投影した θ_x のみを問題にするときは，$E_{\mathrm{s}}\to E_{\mathrm{s}}/\sqrt{2}=$ 13.6 MeV とする．

$$Z_m=\left[\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right]^{-1} \tag{7.52}$$

で定義される Z_m は形成領域 (formation zone) と呼ばれる量である．遷移振幅は，

$$T_{fi}=e\varepsilon_\mu{}^*(\lambda)(v^\mu/v)j_\omega \tag{7.50 b}$$

で与えられる．

放出確率は，振幅を自乗し終状態密度を掛ければ得られる．

$$\mathrm{d}w_{fi}=\sum_{\lambda=\pm}|T_{fi}|^2\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \tag{7.53}$$

偏極和は

$$\sum_{\lambda=\pm}\left|\varepsilon_\mu\frac{v^\mu}{v}\right|^2=\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\frac{v^iv^j}{v^2}=\left|\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\times\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right|^2=\sin^2\theta \tag{7.54}$$

となる．以上は真空中での計算であるが，物質中での電磁場（フォトン）の式は，真空の式から

$$e\to\frac{e}{\sqrt{\varepsilon}},\quad c\to c_m=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}},\quad \varepsilon=n^2 \tag{7.55}$$

の置き換えによって得られる．(7.51)，(7.54), (7.55) を (7.53) に入れて，フォトンエネルギー ω を掛ければ，角度 θ 方向に放出される単位振動数単位立体角あたりのエネルギー量が求められる．$\hbar, c$ を入れて次元を復元すれば，

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega}=\frac{\hbar\alpha\omega^2n}{4\pi^2c^2}\left|\int(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{v}})e^{i(\omega/v-k\cos\theta)z}\mathrm{d}z\right|^2 \tag{7.56}$$

ただし，$\hat{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$, $\hat{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}/v$ である．媒質が一様ならばこの積分はデルタ関数を与えるから，位相が 0 つまり，

$$\cos\theta=\frac{1}{n\beta}=\frac{1}{v/c_m},\qquad c_m=\frac{c}{n}$$

が成立するときのみ寄与を与える．すなわち，粒子の速度が物質中の光速度を超えるとき光が放出される．これをチェレンコフ放射という．積分を実行すると，

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\alpha\hbar\omega}{c}\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)L=\frac{\alpha\hbar\omega}{c}\sin^2\theta L \tag{7.57}$$

---

*1) $\theta=\sqrt{\theta_x{}^2+\theta_y{}^2}$ である．1 次元に投影した θ_x のみを問題にするときは，$E_s\to E_s/\sqrt{2}=13.6$ MeV とする．

荷電粒子の速度が物質中の光速度を超えなければ，(7.56) の位相がゼロにならないので，一様な媒質では放射が起こらない．しかし，媒質が一様でないとき，たとえば $z=0$ に境界がありそれぞれの屈折率を n_1, n_2 とすれば事情は異なる．この場合 $n>1$ である必要はない．$|z|\gg Z_m$ では指数関数による振動が激しいので，積分に寄与しないが，$|z|=0\sim Z_m$ の領域の積分は有限な値をもち放射が可能である．これを遷移放射と呼ぶ．上の議論からわかるように，遷移放射とチェレンコフ放射の発生原因は同一である．遷移放射が起きるためには，誘電率の異なる境界がそれぞれ形成領域 Z_m 以上の厚みをもつことが必要である．光は不連続層で反射や屈折を行うので，正しい遷移放射の式を得るにはこのことを考慮しなければいけないが，放出光が X 線領域でこの効果は無視できるとして積分を実行すれば，

$$\frac{d^2S}{d\omega d\Omega}=\frac{\hbar\alpha\beta^2 n\sin^2\theta}{4\pi^2}\left[\frac{1}{1-n_1\beta\cos\theta}-\frac{1}{1-n_2\beta\cos\theta}\right]^2 \qquad (7.58)$$

が得られる．放射は分母が 0 になる付近で大きいので，$(1-n\simeq\omega_p{}^2/(2\omega^2))$ の小さい X 線領域，超高エネルギー $(1-\beta\sim1/(2\gamma^2), \gamma\gtrsim1000)$ で有用であり，かつ前方放射 $(\theta\lesssim1/\gamma)$ である（後述§ 7.4.2 c)．

7.2.5 電子・光子と物質の相互作用

a. 制 動 放 射

電子と光子の電磁相互作用は，他の重い荷電粒子のそれとはかなり異なるので特別に考慮する必要がある．高速の荷電粒子は，原子核のつくる強い電場の影響を受けて，制動放射により光子を放出してエネルギーを失う．古典電磁気理論によれば，光子放出の割合は加速度を α として，$(2/3)(e^2/4\pi)\alpha^2$ に比例する．$\alpha\propto z/m$ であるので，制動放射の割合は，$(z/m)^2$ に比例する．したがって軽い荷電粒子すなわち電子の場合は大きな効果となる．

原子核による制動放射は，原子核が供給する仮想フォトン k' とのコンプトン散乱 $\gamma(k')+e(p_i)\rightarrow e(k)+e(p_f)$ と考えられるから，遷移振幅の式は，コンプトン散乱振幅の (5.117)，(5.118) 式から，入射フォトン (k') を外場 $A^\mu=(Ze/r\,;0,0,0)$ で置き換えて得られる．

$$\varepsilon'_\mu(k')e^{-ik'x} \longrightarrow \frac{Ze}{4\pi r}=\frac{Ze}{(2\pi)^3}\int\frac{\delta_{\mu 0}}{|\boldsymbol{k}'|^2}e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3k' \tag{7.59}$$

上の置き換えにより制動放射の遷移振幅は

$$\begin{aligned} iT_{fi}&=-2\pi i\delta(E_i-E_f-\omega)\frac{Ze^3}{|\boldsymbol{k}'|^2} \\ &\times\bar{u}(p_f)\left[\not\varepsilon^*\frac{\not p_f+\not k+m}{(p_f+k)^2-m^2}\gamma^0+\gamma^0\frac{\not p_i-\not k+m}{(p_i-k)^2-m^2}\not\varepsilon^*\right]u(p_i) \end{aligned} \tag{7.60}$$

$$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{k}$$

に置き変わる．遷移確率はこれを自乗してトレース計算をすれば得られる．単純な計算ではあるが式としては複雑であるので簡単化することを考える．まず，電子のエネルギーは非常に大きく（例えば～1 GeV → γ～1000），放射されるフォトンのエネルギーは小さい（$\omega\ll E_i, E_f$）とする．分母は

$$(p_i-k)^2-m^2=-2(p_ik)=-2E_i\omega(1-\beta\cos\theta)\simeq E_i\omega(\theta^2+\gamma^{-2})$$

であるから，フォトン放射は $\theta\lesssim 1/\gamma$ の前方放射が大部分である．$|\boldsymbol{k}'|^{-4}$ により $\boldsymbol{p}_i\rightarrow\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_f$ も小角散乱であるから，電子のスピン効果は無視できる（(5.60) 参照），電子の伝播関数の分子はスピン和 $\not q+m=\sum u(q)\bar{u}(q)$ であることを考慮すると，

$$\bar{u}(p_f)[\not\varepsilon^*(\not p_f+\not k+m)\gamma^0+\gamma^0(\not p_i-\not k+m)\not\varepsilon^*]u(p_i)$$

$$=\sum_{\text{スピン}}\bar{u}(p_f)[\not\varepsilon^*u(p_f+k)\bar{u}(p_f+k)\gamma^0+\gamma^0u(p_i-k)\bar{u}(p_i-k)\not\varepsilon^*]u(p_i) \tag{7.61}$$

$$\rightarrow 4[\varepsilon_\mu{}^*p_f{}^\mu E_i+\varepsilon_\mu{}^*p_i{}^\mu E_f]$$

となる．$4E_iE_f$ は波動関数の規格から生じる因子である．単位時間当たりの遷移確率は

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_{fi}&=\frac{8\pi\delta(E_i-E_f-\omega)}{2E_i}\left[\frac{Ze^3}{|\boldsymbol{k}'|^2}\right]^2 \\ &\times\left|\frac{E_i\varepsilon_\mu{}^*v_f{}^\mu}{\omega(1-\beta_f\cos\theta_f)}-\frac{E_f\varepsilon_\mu{}^*v_i{}^\mu}{\omega(1-\beta_i\cos\theta_i)}\right|^2\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^6 2\omega 2E_f} \end{aligned} \tag{7.62}$$

この式とモット散乱断面積を比較してみよう．スピン効果を無視したモット断面積は，(5.51) 式から $(1/2)\sum_{\text{スピン}}|\bar{u}_s(p_f)\gamma^0u_r(p_i)|^2\rightarrow 4E^2$ の置き換えをして与えられるから，

$$d\sigma_M = 2\pi\sigma(E_i - E_f)\frac{1}{2E_i v}\left[\frac{Ze^2}{q^2}\right]^2 4E^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} = \frac{4Z^2\alpha^2 E^2}{q^4}d\Omega \quad (7.63)$$

フォトン偏極和をとることは，$\varepsilon_\mu v^\mu \to \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{v}(\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)$ の置き換えに等しいことに留意して，$E_f = E_i$ としたうえで，フォトンエネルギーを掛けて１回の衝突でのエネルギー損失量を求めれば

$$\frac{dS}{d\omega} = \frac{\hbar\alpha k^2}{4\pi^2}\left|\frac{\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{v}_f}{\omega(1-\beta_f \cos\theta_f)} - \frac{\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{v}_i}{\omega(1-\beta_i \cos\theta_i)}\right|^2 d\Omega_k d\sigma_M \quad (7.64)$$

ただし，$d\sigma_M$ の中の $q^2 = |\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{k}|^2$ であり，$E_f = E_i - \omega$ であることに注意しよう．原子核は十分重いとして反跳を無視しているので (外場近似)，エネルギーは保存しているが，運動量は保存していない．この式は，等速運動をする荷電粒子のフォトン放出率を与える (7.56) 式で，$z=0$ で散乱が起きたとし，$z=0$ を境に電子の方向を変える式に散乱の起きる確率を掛けたものに等しい．積分するとこのままでは発散するので，多重散乱で考慮したと同じく原子による遮蔽効果を取り入れなければならない．積分は面倒な計算であるので結果のみを引用する[12)]．

$$\frac{dS}{d\omega} = 4\bar{\phi}\left[\left(\frac{E_i^2 + (E_i - \omega)^2}{E_i(E_i - \omega)} - \frac{2}{3}\right)\ln\frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{9}\right] \quad (7.65\,\mathrm{a})$$

$$\bar{\phi} = Z^2 \alpha r_e^2, \qquad r_e = \alpha\hbar/m_e c \quad (7.65\,\mathrm{b})$$

制動放射の特徴は，放出フォトン数がほぼ $1/\omega$ に比例することしたがってエネルギースペクトルがほぼ一定であることである．エネルギーで積分しさらに距離 x を進む間の散乱回数を掛ければ，長さ x 当たりのエネルギー損失が得られる．結果は

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0} \quad (7.66\,\mathrm{a})$$

というわかりやすい形となる．したがって

$$\therefore \quad E = E_0 e^{-x/X_0} \quad (7.66\,\mathrm{b})$$

図7.12 (a) は，$(1/E)(dE/dx)$ を示したものであるが，エネルギーの高いところで (7.66a) がよい近似であることがわかる．$1/X_0 \propto Z^2$ であるから，$(dE/d\xi)_{\mathrm{brems}} \propto Z^2$，一方，$(dE/d\xi)_{\mathrm{ion}} \propto Z$ であるので，

$$\frac{(dE/d\xi)_{\mathrm{brems}}}{(dE/d\xi)_{\mathrm{ion}}} \simeq \frac{(Z+1.2)E(\mathrm{MeV})}{800} \equiv \frac{E}{E_c} \quad (7.67)$$

したがってエネルギーの高いところでは，制動放射によるエネルギー損失が大きいが，エネルギーが低くなってくると，イオン化による損失が効く．両者がほぼ等しくなるエネルギーを臨界エネルギー E_c (critical energy) という．電磁カロリメーターを設計するときの重要パラメターである．上式より，

$$E_c \simeq 800\ \mathrm{MeV}/(Z+1.2) \tag{7.68}$$

表 7.1 によく使われる物質の放射長と臨界エネルギーを示す．

表 7.1　物質の放射長と臨界エネルギー

物　質	X_0 (gr)	E_c (MeV)
H_2 (液体)	69.3	382
C	44.4	102
Al	24.3	47
Fe	13.8	23.9
Pb	5.83	6.9

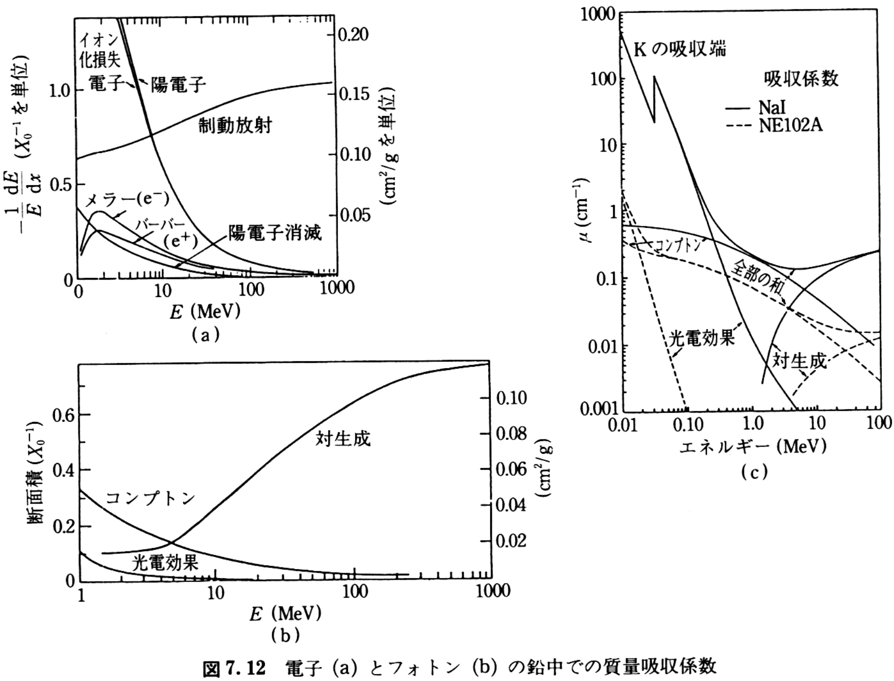


図 7.12　電子 (a) とフォトン (b) の鉛中での質量吸収係数
図には示していないがエネルギーの高いところ ($10^3 < E < 10^6$ MeV) ではほぼ定数となる[8]．
(c) フォトンのシンチレーター内での吸収係数 (NaI と有機シンチレーターNE 102 A)．

他の粒子，例えば，ミューオンの場合の E_c は，電子の E_c の $(m_\mu/m_e)^2 \simeq 4 \times 10^4$ 倍となるので，$E \geqq 300$ GeV くらいになるまでは制動放射の効果を無視してよい．

LPM 効果：　制動放射では，電子の散乱角フォトンの放出角ともに小さい．このことは，標的原子核が電子に与える運動量遷移がほとんど横方向であり，縦方向の運動量遷移は非常に小さいことを意味する．

$$k_{//}' = p_i - p_f - \omega = \sqrt{E_i^2 - m^2} - \sqrt{E_f^2 - m^2} - \omega \sim \frac{m^2\omega}{2E_iE_f} \sim \frac{\omega}{2\gamma^2}$$

従って，ハイゼンベルグの不確定性原理により，フォトンの放出される領域もまた $1/k_{//}'$ 程度に広がっていることを意味する．これはすでに紹介した形成領域の直観的な再導入である．形成領域の長さは $\sim 2\gamma^2/\omega$ で与えられるので，例えば 25 GeV の電子からの 100 MeV フォトンの放出の際の形成領域は，10 ミクロン (μm) 程度ある．もし電子がこの形成領域にいる間に，条件が変わると放出フォトンの干渉が生じる．例えば，形成領域にたくさんの散乱中心があると多重散乱により電子の軌道が乱される．散乱角がフォトン放出角程度に大きい場合はフォトンの放出が抑制される．これを LPM (Landau-Pomeranchuk-Migdal)[13] 効果という．またフォトンのエネルギーが小さくなると（波長が長いと）密度効果も効いてくる．形成領域内にある物質の誘電効果により波数が $k \to nk$ になるので $(n-1)kZ_m$ だけの位相のズレが生じ元の波と打ち消し合うような干渉効果を生じるのである．

以上の議論をもう少し定量化するため，フォトン放出振幅が形成領域 Z_m に比例することに注目する．形成領域の定義式 (7.52) は，$1-\beta \sim 1/(2\gamma^2)$, $1-n \sim \omega_p{}^2/\omega^2$, $1-\cos\theta \sim \theta^2/2$ がすべて 1 に比べて非常に小さい極限で，

$$Z_m = \frac{2c\gamma^2}{\omega}\frac{1}{1+\gamma^2\theta^2+\gamma^2\omega_p{}^2/\omega^2} \qquad (7.69)$$

と書ける．これを眺めるとフォトン放出率が減少するのは，上式分母の第 2, 3 項が 1 に比べて無視できなくなるときであることがわかる．LPM 効果は第 2 項が乱されことから生じ，第 3 項が密度効果を与える．形成領域を通過する間に生じる多重散乱角 Θ が放出角 θ に等しくなるという条件で，フォトンエネルギー ω_{LPM} を定義すれば，

$$\gamma^2\langle\Theta^2\rangle_{X=Z_m}=1 \longrightarrow \hbar\omega_{\mathrm{LPM}}=\frac{E_e{}^2}{E_{\mathrm{LPM}}} \tag{7.70 a}$$

$$E_{\mathrm{LPM}}(\mathrm{TeV})=\frac{(m_e c^2)^4 X_0}{2\hbar c E_s{}^2}=3.6X_0\ (\mathrm{cm}) \tag{7.70 b}$$

これから，

$$\hbar\omega<\hbar\omega_{\mathrm{LPM}} \quad もしくは, \quad \frac{\hbar\omega}{E_e}<\frac{E_e}{E_{\mathrm{LPM}}} \tag{7.71}$$

の領域でフォトン放出が抑制されることがわかる．E_{LPM} は鉛で 2.1 TeV，炭素で 74 TeV であるので基本的に超高エネルギー現象である．どれだけ抑制されるかの計算は簡単ではない．(7.64) の括弧の中にある項の数が増えるからである．定性的にいえば，放出フォトン数が通常の $1/\omega$ の振る舞いからずれ，$\omega\ll E_e$ では $1/\sqrt{\omega}$ のように振る舞う．図 7.13 に 25 GeV 電子のウラニウムにおける 1 放射長あたりのエネルギー損失を，標準的なベーテ-ハイトラーの式と比較してある[14]．

なお，次に述べるフォトンによる対生成過程に対しても全く同じ議論ができるので，ここでもLPM抑圧が存在する．LPM効果が問題になるようなエネルギーは非常に大きく，これまでは超高エネルギーの宇宙線現象でしか問題に

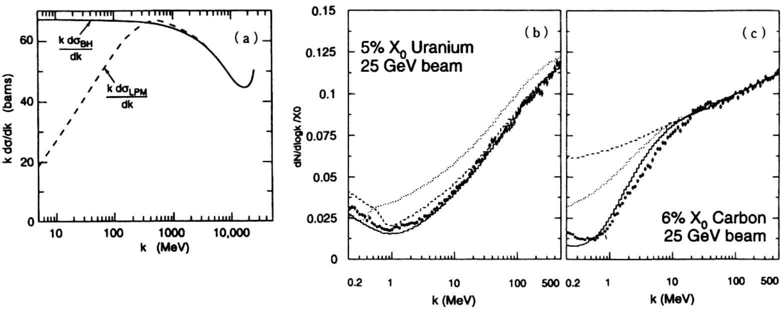


図 7.13 制動放射における LPM 効果と誘電効果

(a) 25 GeV 電子ビームのウラニウム入射の放出フォトンのスペクトル．BH (ベーテ-ハイトラー) の式と LPM の比較．

(b), (c) 25 GeV 電子ビームの 5%X_0 (放射長) ウラニウムと 6%X_0 炭素入射のフォトンスペクトル．

実線 (—) は LPM+DE (密度効果)+TR (遷移放射) をとり入れたモンテカルロ (MC) 計算．

(b) では，異なる TR の式を使った計算式を点線とダッシュ線で示してある．

(c) では，ダッシュ線 (BH+TR)，点線 (LPM+TR) を示す．

BH は基本的に水平な線になるはずであるが，多重フォトン放射のため低エネルギー側では減少することが MC とデータではでている．

ならなかったが[15]，TeV領域のLHCや将来のリニアコライダーでは無視できない．超高エネルギーの電子はあたかもπメソンのように振る舞うといってもよいであろう．フォトンや電子対の放出量が小さくなりシャワーが長くなるので，電磁カロリメーター製作でサンプリン（後述）の厚さを決めるときにLPM効果を考慮する必要がある．

密度効果は，放出フォトンの位相のずれが1程度になるところから効き始める．

$$(n-1)kZ_m \simeq \gamma^2 \omega_p{}^2/\omega^2 \simeq 1$$

すなわち，

$$\hbar\omega < \gamma\hbar\omega_p \sim \gamma\,[\rho(\mathrm{gr/cm^3})]^{1/2} \times 21\,\mathrm{eV}$$

抑圧効果は（7.69）式の分母第3項によって与えられる．電子エネルギー25 GeV（$\gamma=5\times10^4$）の場合，密度効果は鉛の場合$\omega\sim5$MeV，炭素の場合～1 MeVで効き始めるので，LPM効果の効くエネルギーに比べて小さい．LPM効果は理論的には古くから議論されていたものの，検証は宇宙線で行われることが多く定量的なテストは困難であったが，最近SLACの電子ビームを使って精密検証がなされLPM効果が実証された[14]．図7.13 (b)，(c) にウラニウムおよび炭素標的による制動放射のデータを示す．LPM効果と密度効果が見える．低エネルギーで上昇するのは遷移放射のためである．

b．光吸収係数

光子は主として三つの過程，光電効果，コンプトン効果，対生成により物質と相互作用をしてエネルギーを失っていく．$E_\gamma \gg$数MeVでは対生成のみが効く．フォトン強度（エネルギー × 数）Iが物質厚dxを通過するとその変化は

$$\mathrm{d}I = -\mu I \mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad I = I_0 \exp(-\mu x) \equiv I_0 \exp(-x/X_\mathrm{p}) \qquad (7.72)$$

μを線形吸収係数，xをgr/cm^{2}で測ったときは質量吸収係数と呼ぶことは前と同じである．物質（例えば鉛）中のμはエネルギーの関数として，図7.12 (b) のような形で与えられる．高エネルギーでは，電子フォトンともに吸収係数が一定となるので，(7.67)，(7.72) がよい近似となるのである．

$\mu^{-1} \equiv X_\mathrm{p}$は変換長（conversion length）と呼ばれる量である．X_pが1 GeV以上になると漸近的な値

$$X_p = \frac{9}{7} X_0 \tag{7.73}$$

をとる．図 7.12 (c) に各種のシンチレーター内での光の吸収係数を与える．NaI の方が有機シンチレーター NE102A (商品名) に比べはるかに大きい吸収係数をもつことは，それだけ余分にイオン対をつくることを意味する．エネルギー分解能は統計的要素による部分が大きいから，吸収係数の大きい物質を検出物体として使うとエネルギー分解能が向上する．

7.2.6 カスケードシャワー

a. 電磁シャワー[16)]

非常に高エネルギーの電子は，制動放射によりエネルギーを失うが，つくられたフォトン (γ) もまた，電子陽電子対を発生するので，次々と増殖を行い，多量の電子陽電子対がつくられる (図7.8 (d))．増殖は電子のエネルギーが臨界エネルギー E_c に達するまで行われ，以後はイオン化損失でエネルギーを失う．物質の厚みを X_0 を単位として測れば，イオン化損失とコンプトン効果を無視すると (A 近似)，シャワー現象は物質によらず同一の結果を与える．低エネルギー ($E < E_c$) では，イオン化損失が無視できないので，コンプトン効

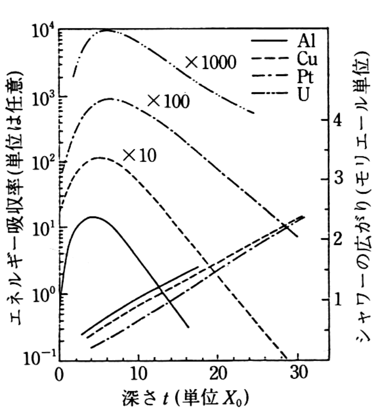


図 7.14 6 GeV/c の電子のシャワーの縦方向発展図 (左座標)
深さを放射長 (X_0) を単位として測れば，物質によらない普遍関数であることがわかる．右座標は各深さでのシャワーのひろがりを示し，90 %のエネルギーを含む半径をモリエール単位で表す[17)]．

果のみを無視して (B 近似), さらにエネルギーを E_c を単位として測ることにすれば, 結果はやはり物質によらない. シャワー中の電子数を物質の深さの関数として, 表したものを図 7.14 に与える[17]. 近似を使った解析式はシャワーの性質を理解するには有用であるが, 最近は計算機が発達しているので実際の計算はモンテカルロで行うことが多い.

b. 簡易モデル

シャワーの基本的性質は次のような簡単なモデルを考察することにより理解できる[18]. 電子は X_0 進むごとに γ を放出してエネルギーを半分失い, γ は X_0 進むごとにエネルギーの等しい電子対に転換するとしよう. $2X_0$ 進むと, E_0 をもっていた元の電子は, それぞれ $E_0/4$ のエネルギーをもつ 2 個の電子, 1 個の陽電子と 1 個のフォトンをもつことになる. こうして, X_0 を単位として t 進むと, 電子の数とフォトンの数は, それぞれ

$$n_e(t)=\{2^{t+1}+(-1)^t\}/3\simeq(2/3)2^t \tag{7.74 a}$$

$$n_\gamma(t)=\{2^t-(-1)^t\}/3\simeq(1/3)2^t \tag{7.74 b}$$

となり, 1 個の電子のもつエネルギーは, $E=E_0/2^t$ となる. $E=E_c$ でシャワー現象が止まるとすれば, $E_0/2^{t_{\max}}=E_c$ であるから

$$t_{\max}=\ln(E_0/E_c)/\ln 2 \tag{7.75}$$

$$N_{\max}=(2/3)2^{t_{\max}}=(2/3)E_0/E_c \tag{7.76}$$

$$N(>E)=\int^{t(E)}N\mathrm{d}t=(2/3)\int^{t(E)}\exp(t\ln 2)\mathrm{d}t$$

$$\simeq(2/3)\exp(t(E)\ln 2)/\ln 2=(2/3)E_0/(E\cdot\ln 2)\simeq E_0/E \tag{7.77 a}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E}=-\frac{2}{3}\frac{E_0}{\ln 2}\cdot\frac{1}{E^2} \tag{7.77 b}$$

全軌跡長は, 1 本の γ に対し 1 対の電子陽電子が見えるので, 軌跡 1 本あたりの長さは, $(2/3)X_0$ となり,

$$L=\frac{2}{3}\int^{t_{\max}}N\mathrm{d}t=(2/3)^2\int e^{t\ln 2}\mathrm{d}t\simeq\frac{4}{9\ln 2}2^{t_{\max}}\simeq\frac{E_0}{E_c} \tag{7.78}$$

イオン化損失による $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ は, エネルギーによらずほとんど一定であるから, カスケードを起こす粒子が物質に与える全エネルギーは, $(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)\times L\propto E_0$ に比例する. シャワーが最大になるところは, $t_{\max}\simeq\ln(E_0/E_c)$ となる. このことはシャワーの長さが対数的に増加することを意味する. 近似が簡単のた

め，シャワーがシャワーサイズ最大のところで突然消滅するが，実際は，もちろん最大のところから緩やかに減少する．モンテカルロ法による詳しい計算および実験データは，以上の簡単なモデルから導かれる結論を定性的にほぼ裏付けている（図 7.14).

実験データに合うように決めたシャワーの全エネルギープロファイルは，ガンマ関数を使って[19]，

$$\frac{dE}{dt}=\frac{E_0 b^a}{\Gamma(a)}t^{a-1}e^{-bt} \tag{7.79 a}$$

$$t=X/X_0, \qquad t_{max}=(a-1)/b=\ln((E/E_c)+C_i) \tag{7.79 b}$$

$$b\simeq 0.5^{*8)}, \quad C_e=-0.5, \quad C_\gamma=0.5 \tag{7.79 c}$$

（a は（7.79 b）より計算する）

で再現できることが経験的に知られている．

c. 横方向の広がり

上記の簡単なモデルでは横方向の広がりは全く無視した．実際の場合は，$E>E_c$ では，制動放射，対生成とも X_0 が特徴的な長さを表すが，$E<E_c$ ではクーロン散乱が無視できなくなく，広がりを表す特徴的な長さは，モリエール (Moliere) 単位

$$R_m\equiv\frac{E_s}{E_c}\cdot X_0\simeq\frac{7A}{Z} \quad (\mathrm{gr/cm^2}) \tag{7.80}$$

程度となる．90 %のエネルギーが，半径 1 R_m 以内に含まれる．シャワーを起こさせて入射粒子の全エネルギーを測定する検出器をカロリメターという．

d. ハドロンシャワー[20]

ハドロンもまた原子核と強い相互作用をして非弾性多重粒子生成を行うので，高エネルギーのハドロンはカスケードシャワーを発生する．ただし，今度は電磁現象でなく原子核反応であるので，放射長 X_0 を吸収長 λ で置き換えれば，電磁シャワーで考察したシャワーの基本的性質はそのままハドロンシャワーにも適用できる．すなわちシャワーのつくる全軌跡長が入射エネルギーに比例すること，シャワーの大きさは $\ln E$ で大きくなることなどである．ハドロンシャワーに特徴的な点をいくつか列挙する．

---

*8) より正確には物質ごとの値が表として与えられている．

i） 吸収長 λ　シャワーの発達を規制する特徴的な長さが，電磁シャワーの場合は放射長 X_0，ハドロンシャワーの場合は吸収長 λ である．水素や重水素などを除けば通常は $\lambda \gg X_0$ であるので，(鉄，鉛で λ が 131.9，194 gr/cm^2，X_0 が，13.84，6.37 gr/cm^2) 電磁シャワーの長さはハドロンシャワーに比べはるかに短い．このことを利用して，電磁シャワーとハドロンシャワーを分離することが可能である．

ii） *e/h* の補償[*9,21)]　エネルギーのかなりの部分が，原子核を分解する (核子の束縛エネルギー) ために使われたり，π から崩壊するニュートリノにもっていかれる．さらに，原子核分裂の際たくさん生成される遅い中性子も観測されにくい．したがって，エネルギーの相当部分が測定器に検出されないので，エネルギー分解能もまた電磁カロリメーターに比べ悪い．2 次粒子の大部分は π であるが，その 1/3 は π^0 であり，$\pi^0 \to 2\gamma$ によって π^0 のエネルギーは電磁シャワーとして観測される．電磁シャワーはすぐその場で発達するので，ハドロンシャワーに比べ局所的に分布する．またエネルギーをシャワーに変換する過程が上に述べた理由でより効率的なので，ハドロンシャワーの中の π^0 成分が偏重されて検出される．このため，エネルギーとして測定器に見える部分は，第 1 回目の衝突での π^0 生成の統計的ゆらぎが露呈しやすい．このようにハドロンカロリメーターでは，電子成分に対する検出効率とハドロン成分に対する検出効率の比 (e/h) が異なる．

これは，遅い中性子の検出効率を高めることによって改良できる．ウラニウムは中性子を捕獲してフォトンを放出するので，カロリメーター材料として使うとエネルギー分解能が向上することが知られているが[21)]，核燃料物質であるため種々の規制がある．そこで通常は，検出物質には水素成分の多い有機体 (有機シンチレーターなど) を使って遅い中性子に対する検出効率を高め，他方では電磁シャワーの検出効率を意図的に弱くする (吸収材を厚くするなど)．シャワー発生物質と軌跡検出物質の組み合わせを調節することにより分解能を多少犠牲にしても，e/h を調整するのである．ハドロンエネルギーと電磁エネルギーに対する応答をそろえることは，エネルギー検出の線形性を改良し，また後に述べる見えないエネルギーの検出に改良効果がある．

---

*9)　測定器用語である．電荷/プランク定数と間違えないように．

7.3 統計と誤差

粒子の反応や崩壊は統計現象である．検出器は粒子の物質との反応を利用して人間の五感でわかる信号に変える変換器であるから，性能はやはり統計現象に左右される．ここでは，実験誤差や検出器の性能を理解するのに必要最小限の統計的知識を解説する．なお，統計と確率の教科書にでていて常用する式は証明なしに掲載し，放射線測定に特に関係あるときのみ必要に応じて証明する．関心ある方は，そちらの教科書を参照して欲しい．

測定に誤差はつきものである．誤差には系統誤差と偶然（統計）誤差の2種類がある．系統誤差とは測定の基準設定に伴う誤差で，測定値を常に一定の方向に過大もしくは過小評価する要因である．誤差の生じる原因が突き止められれば原理的には除ける性質のものであるが，それにも限界はある．例えば，山の高さ h を表すとき海抜 x メートルという言い方をする．海水面を基準として高さ0と設定するわけであるが，$h=0$ は，実際には $+h_0$ または $-h_0$ であり正確な値は知りようがない．ただし，注意深い測定により，$|h_0|$ をある値 ε 以下に設定することは可能で，この ε を系統誤差という．系統誤差は測定の設定条件（実験家の技量？）に左右される量であるので，以下で議論するのは統計誤差に限定する．統計誤差は測定器の不定性要因から，もしくは測定対象が本質的に統計現象の場合に生じる誤差で，測定値がある値の周りに不規則に（でたらめに）分布することから生じる．測定を繰り返せば小さくできる量であるが，系統誤差より大幅に小さくしても意味がないので，通常は系統誤差と同程度になるようにする．

統計誤差がどのような分布関数に従うかは状況による．確率分布関数が知られていないときは，通常正規分布（後述）であると仮定する．そのような仮定をしてもたいていの場合大きな間違いを犯さないのは，正規分布関数の一般的性質および中心極限定理のおかげである．しかし，しばしば正規分布関数の万能性を過信する傾向があるので十分注意が必要である．

7.3.1　統計の基本

まず，これからの基礎となる用語の定義や定理を述べておく．

平均値　　変数 x_i で表される事象が，互いに独立に，しかし，一定の確率分布関数 $f(x_i)$ に従って起こるとき，平均値または期待値 μ を，

$$\mu=\int xf(x)\mathrm{d}x\equiv E(x_i) \tag{7.81}$$

で定義する．ただし，$f(x)$ は次の規格条件を満たすものとする．

$$\int f(x)\mathrm{d}x=1 \tag{7.82}$$

一般に $E(g(x))$ を次式で定義する．

$$E(g(x))=\int g(x)f(x)\mathrm{d}x \tag{7.83}$$

変数が離散値のときは，$f(x)\to f_i$ とし，積分の代わりに和をとる．以下特別に断らない限り，連続関数で定義した場合でも，離散値をとる場合も含めるものとする．

分散 (variance)　　分散を次式で定義し σ^2 と書く．

$$\sigma^2\equiv E((x_i-\mu)^2)=\int(x_i-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x \tag{7.84}$$

$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ を標準偏差 (standard deviation) という．変数 x_i のばらつきを示す量であり，特に定義せずに一般的に誤差というときは σ を意味する．

相関 (corelation)　　統計変数 x_i, y_i があり，それぞれ平均値 μ_x, μ_y，標準偏差 σ_x, σ_y をもつとき，共分散 (covariance) と相関係数 (corelation coefficient) r を次式で定義する．

$$\mathrm{cov}(x, y)=E((x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)) \tag{7.85}$$

$$r=\frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x\sigma_y} \tag{7.86}$$

r は -1 と $+1$ の間の値をとる量である．$y=ax+b$ のような線形関係が存在するときは，$|r|=1$ であり，x と y が完全に独立であるとき（確率関数が $f(x, y)=g(x)h(y)$ のように分離する），$r=0$ となる．

正規分布　　ガラス分布ともいう．正規分布は，あらゆる統計現象で最も頻繁に現れる関数である．測定誤差，測定器の誤差などはたいてい正規分布をすると考えてよい．平均値 μ，分散が σ^2 の正規分布の関数形は

$$N(\mu, \sigma^2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{7.87}$$

で与えられる.

図7.15に，変数を x，平均値を μ，標準偏差を σ と書いたときの関数形を示す．平均値から σ だけ離れた領域内 $(\mu-\sigma \leqq x \leqq \mu+\sigma)$ の面積は，全体の68.3%，2σ 内では95.5%，3σ 内では99.7%である[*10]．x の値が平均値より σ 以上離れる確率が30%以上もあることは覚えておいてよいことである．σ は分布の広がりの目安であるが，σ の代わりに半値全幅 (FWHM=full width at half maximum) もよく使われる．半値全幅とは最大値と最大値の半分の値を与える x の変数領域であり，Γ と記すと，ガウス分布の場合は

$$\Gamma = 2\sigma\sqrt{2 \ln 2} = 2.35\sigma \tag{7.88}$$

である.

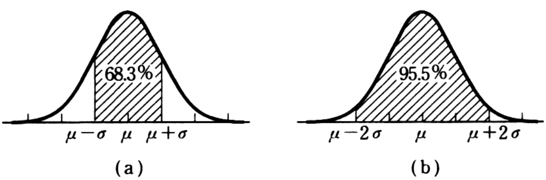


図 7.15 ガウス分布関数の形

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(a) は，平均値 μ のまわりの $\mu \pm \sigma$ の中の面積が 68.3 %，
(b) は，平均値 μ のまわりの $\mu \pm 2\sigma$ の中の面積が 95.5 %
であることを示す.

大数の法則　生起確率が p であるような事象の n 回の独立試行における出現頻度を m とするとき，n を十分大きくとれば (m/n) は p に近づく.

中心極限定理　事象 x_i を互いに独立でかつ同一分布に従う確率変数列とするとき，平均値 $\mu = E(x_i)$，分散 $\sigma^2 = E((x_i - \mu)^2)$ が有限ならば，n が十分大きいとき，この分布は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に近づく.

[*10] 逆に，90，95，99%の面積を与える $|x| < n\sigma$ の n の値は，1.64，1.96，2.58 である.

7.3.2　ポアソン分布と χ^2 分布

a.　ポアソン分布

時間的に一定の割合で，しかし互いに独立に起こる事象はポアソン分布に従う．素粒子物理学での粒子の反応，崩壊現象や，粒子が物質中を通過するときの単位長さあたりのイオン電離数，熱した金属やフォトマル（後述）の光電面から放出される電子の数など，測定器の動作に関連の深い現象に頻出する．時間 t あたりの平均反応数を μ とするとき，ある時間 t の間に反応が r 回起きる確率は

$$P(\mu;r)=\frac{\mu^r}{r!}e^{-\mu} \tag{7.89}$$

で与えられる．これは次のようにして示すことができる．

いま，非常に大きいが有限な時間 T の間に，M（これも十分大きな数とする）回，反応事象が起きるとしよう．M 個の反応は，時間 T の間に一様かつ互いに独立に分布するとしよう．このとき，ある微小時間 $t(\ll T)$ の中に反応が r 個入る確率は，$p=t/T$ として，$p^r(1-p)^{M-r}$ となる．M 個から r 個選ぶ組み合わせは，${}_M C_r$ 通りあるから，時間 t の間に反応が r 回起きる確率は，2 項分布

$$P(M;r)={}_M C_r\, p^r(1-p)^{M-r} \tag{7.90}$$

で与えられる．これを変形して

$$=\frac{M(M-1)\cdots(M-r+1)}{r!}p^r(1-p)^{n-r}$$

$$=\frac{1\cdot(1-1/M)\cdots(1-[r-1]/M)}{r!}(Mp)^r\left(1-\frac{Mp}{M}\right)^{M-r}$$

とし，$M\to\infty$，$T\to\infty$，$Mt/T\to\mu$ にもっていき，$\lim_{M\to\infty}(1-x/M)^M=e^{-x}$ を使えば，(7.89) のポアソン分布を得る．ポアソン分布の場合に，時間 t の間に事象の起きる平均回数 $\bar{r}$，および分散 σ^2 は，

$$\bar{r}=\sum_{r=0}^{\infty}rP(r)=\mu,\qquad \sigma^2=\sum_{r=0}^{\infty}(r-\mu)^2P(r)=\mu \tag{7.91}$$

で与えられる．μ のいくつかの値に対してポアソン分布を図 7.16 に示す．分布は平均値のまわりに対称でないことに注意せよ．

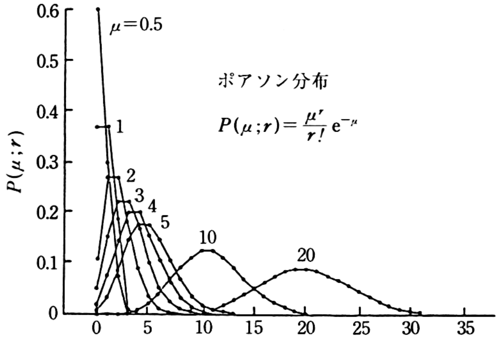


図 7.16 ポアソン分布
$P(\mu;r)=\dfrac{\mu^r}{r!}e^{-\mu}$
$\mu=1\simeq20$ について図示してある.

$\mu=n$ として n が十分大きいときは，平均値 n，分散が n のガウス分布となる（状況にもよるが $n\simeq10$ で，もうよい近似といえよう．図 7.16 参照）．これは中心極限定理の一例である．

演習 7.2 n が大きいとき，ポアソン分布は，平均値が n，分散 σ^2 が n のガウス分布に近づくことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^r}{r!}e^{-n}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\exp\left[-\frac{(r-n)^2}{2n}\right] \tag{7.92}$$

ヒント：スターリングの公式

$$n!\simeq\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n} \tag{7.93}$$

を使え．

例 1： 測定計測数が 0 のときの上限設定値

ある種の理論的保存則をテストするような場合，例えば二重ベータ崩壊反応を検出しようとして，観測例が 0 事象に終わったときの寿命の下限値したがって計測数の上限値を求めたい．二重ベータ崩壊反応率を λ とする．観測時間 T の間事象を 1 例も観測しない確率は，ポアソン分布により

$$P(\lambda;0)=e^{-\lambda T} \tag{7.94}$$

で与えられる．これは，λ を変数として時間 T の間に 0 事象を観測する確率とも見なせる．したがって，$\lambda\leqq\lambda_u$ である確率は

$$P(\lambda\leqq\lambda_u)=T\int_0^{\lambda_u}e^{-\lambda T}d\lambda=1-e^{-\lambda_u T} \tag{7.95}$$

T は λ を変数としたときの規格因子である．これを $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_u$ の間にある信頼水準 CL (confidence level) という．

$$\therefore \quad \lambda_u = -\frac{1}{T}\ln(1-\mathrm{CL}) \tag{7.96}$$

信頼度を 90% にとると，$\lambda_u = 2.3/T$ となる．すなわち，事象数が 0 であったとき，90% 信頼水準の上限値とは，事象数が 2.3 あったとしたときの λ である．

b．χ^2 分布

自由度 n の χ^2 分布は，変数を $x\,(x \geqq 0)$ として次式で定義される．

$$K_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1} e^{-x/2}}{2\Gamma(n/2)} \tag{7.97}$$

ここに，Γ は Γ 関数である．y_i が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき次式で定義される量

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^{\,2}} \tag{7.98}$$

は，自由度 n の χ^2 分布に従う．理論式 ($\mu = f(x; a_j)$; a_j は m 個のパラメター) が実験値をどのくらいよく再現するかの検定に使われる．ただし，$(y_i - \mu)$ $(i=1 \sim n)$ は n 個の独立変数であるが，μ として平均値 $\bar{y}$ を使ったときは，$(y_i - \bar{y})$ は $n-1$ 個の独立パラメターとなるので，χ^2 分布に適用するときは自由度 $n-1$ とすることに注意する．決定すべき m 個のパラメターがある

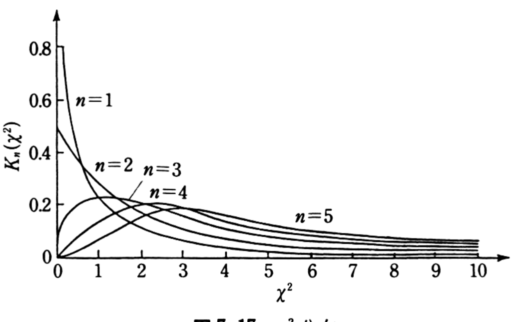


図 7.17　χ^2 分布

$$K_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1} e^{-x/2}}{2\Gamma(n/2)}$$

$n=1 \sim 5$ について図示してある．

ときは，自由度は $n-1-m$ となる．信頼水準 CL は

$$\mathrm{CL}(S)=\int_S^\infty K_n(x)\mathrm{d}x \tag{7.99}$$

で与えられる．通常は CL=5% にとり，$\chi^2 \leqq S$ のとき検定合格とする．図 7.17 に χ^2 分布の例を示す．大ざっぱな目安としては，もし μ が正しい推定値であれば，$(y_i-\mu)^2$ は平均として，だいたい σ^2 くらいの値をとるはずであるから，$\chi^2/n \sim 1$ となることが予想される．χ^2 の値があまりに予想とかけ離れているときは，最初の理論的仮定を再検討する必要がある．

7.3.3 最尤（さいゆう）法と最小二乗法

a. 最尤法 (maximum likelihood method)

測定対象となる真の物理量 μ およびその分散 σ^2 の値は，前もって知りうる量ではないが，測定によって推測できる．いま，確率分布 $f(x;a)$ に従う，n 個の独立な観測サンプル $x_i\,(i=1\sim n)$ があるとする．このような x_i を統計変数と呼ぼう．ここで，a は決めるべきパラメターである．このとき尤度（ゆうど）関数 L を次の式で定義する．

$$L(x;a)=f(x_1;a)f(x_2;a)\cdots\cdots f(x_n;a) \tag{7.100}$$

これは，観測量として $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を与える確率とも見なせる．この確率は観測値に対して最大になるはずのものであるから，L を最大にする a が最良の値であるといえる．L が解析関数であれば，a は

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}a}=0,\quad \text{もしくは}\quad \frac{\mathrm{d}L^*}{\mathrm{d}a}=0 \tag{7.101}$$

を解いて得られる．ただし，$L^*=\ln L$ である．a の決定においては，二つの式は同等であり状況に応じて使い分ける．パラメターの数が複数あるときは連立方程式が得られる．(7.101) を満たす a を $\hat{a}$ と書く．$\hat{a}$ は真の a ではなく a の推定値である．分散の推定値は，

$$\sigma^2(\hat{a})=\int(a-\hat{a})^2L(x;a)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{7.102}$$

で与えられる．

確率関数がガウス関数のときは，尤度関数 L は

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{7.103}$$

で与えられる．μ の推定値を $\hat{\mu}$, σ^2 の推定値を $\hat{\sigma}^2$ とすると，$L^*=\ln L$ を最大にする各パラメターの値は

$$\frac{\partial L^*}{\partial\mu}=\sum\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}=0 \longrightarrow \hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x} \tag{7.104 a}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\frac{1}{\sigma^2} \longrightarrow \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \tag{7.104 b}$$

として得られる．実際には真の μ を知らないので，μ の代わりに算術平均 $\bar{x}$ を使用して σ^2 を求めることになる．この場合独立変数の数が 1 減るので，$\hat{\sigma}^2$ の代わりに次の s^2 を使う方がより正しい値を与えることが知られている．n が大きいときはどちらを使おうと違いは小さい．

$$s^2=\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\simeq\frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{7.105}$$

$\bar{\mu}$ の推定値として算術平均 $\bar{x}$ が得られた．$\bar{x}$ は n 回の試行における平均値であるが，真の平均値の推定値である．真の平均値 μ でないから，もう一度 n 回の試行を繰り返せば別の算術平均が得られるであろう．その意味で，$\bar{x}$ 自身統計変数である．したがって，$\bar{x}$ の μ のまわりの分散が定義できて，

$$\sigma^2(\bar{x})\equiv E((\bar{x}-\mu)^2)=\frac{1}{n^2}E(\sum_i(x_i-\mu)^2)=\frac{1}{n^2}\sum E((x_i-\mu)^2)$$
$$=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n} \tag{7.106}$$

このことから，$\delta\bar{x}=\sqrt{\sigma^2(\bar{x})}=\sigma/\sqrt{n}$ が，μ の推定値として算術平均 $\bar{x}$ を採用したときの誤差を与えることがわかる．これを通常平均値の標準誤差 (standard error of the mean) という．なお，上の導き方からわかるように，$\bar{x}$ の標準誤差 $\delta\bar{x}$ が $\sigma/\sqrt{n}$ となる事実は，分布関数の種類によらない．

ここで，注意すべきは，$\hat{\sigma}^2$ は σ^2 (変数 x の分散) の推定値であって，$\bar{x}$ の分散の推定値ではないという事実である．σ は，変数 x_i の試行ごとのばらつきを決める変数であり，何回試行しても変わる量ではない．ただし，真の σ は知らず，推定値 $\hat{\sigma}$ が，n 個の x_i により決められるので，n が大ならば $\hat{\sigma}$ は一定値 σ に近づくのである．一方 $\bar{x}$ は μ の推定値であり，これは n が大きけ

れば真の値 μ に近づく．$\bar{x}$ が μ にどれだけ近いかを表すという意味の分散が，σ^2/n であり，こちらの方は n が大きくなれば 0 に近づく量である．

分布関数がポアソンの場合，最尤法により推定値 $\hat{\mu}$ を求めると，やはり算術平均となる．ポアソン分布では，$\sigma^2=\mu$ であるから $\hat{\mu}$ の標準誤差は

$$\delta\bar{x}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\sqrt{\frac{\mu}{n}}\simeq\sqrt{\frac{\hat{\mu}}{n}} \tag{7.107}$$

となる．

さて，ガウス関数の場合，$\partial L^*/\partial\mu=0$ のところでは，

$$-\frac{\partial^2 L^*}{\partial\mu^2}=\frac{n}{\sigma^2}=\frac{1}{\delta\bar{x}^2} \tag{7.108}$$

が成立していることに注意しよう．(7.102) は一般的な式であるが，解析的に解けないときは，中心極限定理を適用し，ガウス分布のときに成立する σ^2 と L^* との関係式 (7.108) をそのまま借用する．すなわち，

$$\frac{1}{\sigma^2(\hat{a})}=-\left[\frac{\partial^2 L^*}{\partial a^2}\right]_{a=\hat{a}} \tag{7.109}$$

ただし，一般にはこれは近似式であり，数が大きいときにのみ有効であることに注意しておく必要がある．複数のパラメターがあるときは，

$$(U^{-1})_{ij}\equiv-\frac{\partial^2 L^*}{\partial a_i\partial a_j} \tag{7.110}$$

の逆行列として誤差行列 U を定義する．このとき，対角要素が，$\hat{a}_j$ の分散 ${\sigma_j}^2$ に，非対角要素が共分散に等しいことが示せる．すなわち

$$U=\begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & \mathrm{cov}(1,2) & \mathrm{cov}(1,3)\cdots\cdots \\ & {\sigma_2}^2 & \mathrm{cov}(2,3)\cdots\cdots \\ & & {\sigma_3}^2 \qquad \cdots\cdots \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \tag{7.111}$$

最尤法で決めた推定量は変換で不変である．すなわち $\beta=g(a)$ であるならば，β の最良推定値 $\hat{\beta}$ は $\hat{\beta}=g(\hat{a})$ で与えられる．

b．誤差の伝播

得られた変数の値を使って別の量を計算したいことがしばしばある．そこで，標準偏差 σ_x, σ_y をもつ変数 x, y から，変数 $u=f(x,y)$ を計算したとき

に，u の標準偏差 σ_u を求めることを考える．u の分散 σ_u^2 は，

$$\sigma_u^2 = E((u-\bar{u})^2) \tag{7.112}$$

$\bar{u}$ は第 1 近似では，$f(\bar{x}, \bar{y})$ で与えられる．x, y が $\bar{x}, \bar{y}$ のまわりを動いたときに u が $\bar{u}$ のまわりをどう動くかは，u を $\bar{x}, \bar{y}$ のまわりにテイラー展開すれば

$$u-\bar{u} \simeq (x-\bar{x})\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} + (y-\bar{y})\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{y}} \tag{7.113}$$

となるから，(7.113) を 2 乗して (7.112) に入れれば

$$E((u-\bar{u})^2) = E\left[(x-\bar{x})^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + (y-\bar{y})^2\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 \right.$$
$$\left. + 2(x-\bar{x})(y-\bar{y})\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right] \tag{7.114 a}$$

であるので，(7.84) と (7.85) を使えば

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \sigma_y^2\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 + 2\,\mathrm{cov}(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} \tag{7.114 b}$$

となる．すなわち，誤差は自乗和（プラス共分散項による補正）で表されることがわかる．x と y が独立変数であれば第 3 項はない．相関があるときは，共分散項の符号と大きさによって，自乗和から大幅に変更されることがありうるが，以下ではこの項は考えないことにする．

例 1：

$$u = x \pm y \tag{7.115 a}$$

$$\sigma_u^2 \simeq \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \tag{7.115 b}$$

いま，電子を中性子標的に当てる反応を測定するため，重水素標的と水素標的の 2 種類の実験を考えて，その差から中性子標的反応率を求める．全測定時間を T，実験 1, 2 をそれぞれ t_1, t_2 秒間行い（$T = t_1 + t_2$），計数 n_1, n_2 を得るとする．このときの両実験の適切な時間配分を定めよう．計数率は，それぞれ $r_1 = n_1/t_1$，$r_2 = n_2/t_2$ であり，測定したい量は，$r = r_1 - r_2$ である．誤差を δ で表すことにすると，ポアソン分布であるので計数値 n の分散 σ^2 は n であり，$\delta n = \sqrt{n}$ である．(7.115 b) より，

$$\delta r^2 = \delta r_1^2 + \delta r_2^2 = \frac{\delta n^2{}_1}{t_1^2} + \frac{\delta n^2{}_2}{t_2^2} = \frac{n_1}{t_1^2} + \frac{n_2}{t_2^2} = \frac{r_1}{t_1} + \frac{r_2}{T-t_1} \tag{7.116}$$

となるので，δr を極小にするには，上式を t_1 で微分して 0 とおけば

$$\frac{t_1}{t_2}=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \tag{7.117}$$

を得る．

例 2：
$$u=x\cdot y \text{ または } x/y \tag{7.118 a}$$

$$\frac{{\sigma_u}^2}{u^2}=\frac{{\sigma_x}^2}{x^2}+\frac{{\sigma_y}^2}{y^2} \tag{7.118 b}$$

例 3： 角分布の非対称

よく使う例として角分布の非対称を測定したいことがある．R を $0\leqq\cos\theta\leqq 1$ の計測数，L を $-1\leqq\cos\theta\leqq 0$ の計測数とするとき，非対称 A

$$A=\frac{R-L}{R+L} \tag{7.119}$$

の誤差 σ_A を求めてみよう．

$$\frac{\partial A}{\partial R}=\frac{2L}{(R+L)^2}, \qquad \frac{\partial A}{\partial L}=\frac{-2R}{(R+L)^2} \tag{7.120 a}$$

であるから，$N=R+L$ として

$${\sigma_A}^2=\left[\frac{4L^2}{N^4}\right]{\sigma_R}^2+\left[\frac{4R^2}{N^4}\right]{\sigma_L}^2 \tag{7.120 b}$$

L, R ともにポアソン分布に従うから，${\sigma_R}^2=R$，${\sigma_L}^2=L$ となるので，(7.120 a) は，

$${\sigma_A}^2=\frac{4L^2R+4R^2L}{N^4}=4\frac{RL}{N^3}=\frac{1-A^2}{N} \tag{7.120 c}$$

となる．A が小さいときは，

$$\sigma_A\simeq\sqrt{\frac{1}{N}} \tag{7.121}$$

という結果を得る．

c．最小二乗法 (the least squares method)

x の関数として $y=f(x\,;a_1, a_2, \cdots, a_m)$ があり，測定によって，m 個のパラメター a_j を決めたいとしよう．n 個の x_i $(i=1\sim n)$ 点で，測定が行われ，測定値 y_i とその誤差 σ_i が得られたものとする．このとき，次の量を最小にすることによってパラメターを決定する方法を最小二乗法という．

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i-f(x_i\,;a_j)}{\sigma_i}\right]^2 \tag{7.122}$$

意味ある答を得るためには，n の数は決めるべきパラメターの数より大きくなければならない．y_i が $f(x_i;a_j)$ を平均値とするガウス分布をするときは，最小二乗法は最尤法に等しいことは容易に証明できる．またこのときは，S は (7.98) で定義した χ^2 に等しくなるので，最小二乗法は，しばしば χ^2 を最小にする方法であるともいわれる．y_i がガウス分布をしないときはもちろん真の χ^2 ではないが，混同して使っても，中心極限定理によってたいていの場合それほど間違いではない．

なお，(7.122) においては，x の誤差 σ_x はないとしたが，状況によっては σ_y と同程度の誤差を誘起する場合がある．そのときは，${\sigma_y}^2$ の代わりに

$$ {\sigma_y}^2 \longrightarrow {\sigma_y}^2 + {\sigma_x}^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 \tag{7.123} $$

を使用する．

パラメター a_j を最適にするには，S を最小にすればよいので，

$$ \frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \tag{7.124} $$

によって，方程式を解くことになる．解析的に答が得られないときは，コンピューター処理をすることになる．a_j の誤差行列 U_{ij} を次式によりつくることは，前 ((7.110)) と同様である．

$$ (U)^{-1} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial a_j} \tag{7.125} $$

S が非線形のときは，コンピューターを使用して数値的に解くしか方法がない．このとき，誤差行列もまた数値的に解かないといけないが，このときの分散 σ^2 を決める方法は，やはりガウス分布のときの関係式をガイドラインとする．ガウス分布のときは，

$$ \sigma^2(\hat{a}) = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\right]^{-1}_{a=\hat{a}} \tag{7.126} $$

であった．S を極小値のまわりにテイラー展開すると

$$ \begin{aligned} S(a) &\simeq S(\hat{a}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(a-\hat{a})^2 \\ &= S(\hat{a}) + \frac{1}{\sigma^2}(a-\hat{a})^2 \end{aligned} \tag{7.127} $$

であるから，

$$S(\hat{a}+\sigma)=S(\hat{a})+1 \qquad (7.128)$$

が成立する．この関係式を一般化して a の誤差 σ とは，a を変化させて S が最小の値をとるところから 1 増加するときの a の変化量であると定義できる．また，(7.126) は，数値的に σ をどう求めるかの方法をも示唆している．

a_1, a_2 と二つのパラメターがあるときは，a_1-a_2 の 2 次元平面で，S が極小から 1 だけ大きくなるところを結ぶ閉曲線が，誤差範囲を示すこととなる．

7.4 粒子検出器

7.4.1 放射線測定器の概略

放射線検出器とは，粒子が検出器中を通過する際，検出器中の物質と反応を起こして生じる信号を，光または電気情報として取り出すものをいう．歴史的には放射線は写真乾板によって見つけられた．ラザフォード原子モデルのもととなった α 線の散乱観測には，ZnS シンチレーターの発光を顕微鏡で見るという方法がとられた．その後電離箱 (ionization chamber)，比例計数管 (proportional counter)，ガイガー計数管などが開発され，個々の放射線のエネルギー測定が可能になった．1940 年頃からは，光電子増倍管 (photomultiplier；通称フォトマル) が発明されて蛍光を電気信号に変換増幅することが可能になり，電子回路の発達とあわせて放射線計測技術は大きく進歩した．放射能計測を真に高速化し，今日の高エネルギー実験の基礎を築いたのは 1968 年，チャルパック (G. Charpak) による多線式比例計数箱 (MWPC；multi-wire proportional chamber) の発明である．

陽電子発見に使われたウィルソン霧箱，中間子発見に使われた写真乾板，ストレンジ粒子をはじめとしてたくさんのハドロン共鳴発見に威力を発揮した泡箱などの全立体角測定器は，素粒子反応によって生じたたくさんの 2 次粒子をまとめて映像に残し，全体のトポロジーが把握できるという意味で強力な検出器であり，歴史的に重要な役割を果たした．しかし，応答時間や事象記録後の回復時間がともに長いため，現代の高速計測にはほとんど用いられなくなった．現在は，以下に述べるような種々のカウンターやガス箱に高速電子回路・コンピューターを組み合わせて，(1) 全立体角有感検出，(2) 全体のトポロ

ジー再現能力，(3) 高速計測のすべてを実現させている．

以下は，信号の種類によって検出器を分類解説し，次に目的に応じた使用法について述べることにする．信号の種類は光信号と電気信号に分けることができる．光信号として取り出すものには，蛍光（シンチレーション）発光を使うシンチレーションカウンターとチェレンコフ光を使うチェレンコフカウンター，誘電率の異なる二つの物質の境界を荷電粒子が通過するときに発する光を使う遷移放射検出器 (transition radiation detector ; TRD) などがあり，電気信号として取り出すものに半導体検出器と種々のガス箱 (gas chamber) がある．大まかにいって，光信号は電気信号に比べて，時間応答が少なくとも 1 桁は速いが，位置の精度は電気信号によるものに利点がある．

7.4.2　光を用いる検出器

a.　シンチレーションカウンター

i）有機シンチレーター　　蛍光剤（アントラセン ($C_{14}H_{10}$)，p-ターフェニル ($C_{18}H_{14}$)，テトラフェニルブタジエンの混合物などがよく使われる）をトルエン (C_7H_8) などの有機溶媒に溶かした液体蛍光剤や，プラスチック中に混入したプラスチックシンチレーターがある．イオン化による電子が，蛍光剤を分子励起状態に励起させ，この分子が基底状態に戻るときに発光する．これは通常，紫外 (ultra violet ; UV) 領域の発光であるので，光電子増倍管の有感領域（通常光波長にしておおよそ 400～700 nm(ナノメーター＝10^{-9} m)）の可視光に変換するため，別の蛍光物質（波長変換剤 ; wave length shifter）を混入する．有機シンチレーターは，減衰時間が 1 nsec (10^{-9} 秒）程度で，高速計測に適している．

ii）無機シンチレーター　　NaI，CsI，BiGe，BGO などがある．

NaI が歴史的に古くから使われたが，他の物質も動作原理は同様である．NaI はナトリウムの結晶に微量のタリウムを混入する．タリウムが光活性中心となり，イオン化によって生じた電子が活性中心に捕えられ，励起状態から落ちるときに発光する．無機シンチレーターの利点は，第 1 に有機シンチレーションカウンターに比べ光量が大きいので，エネルギー分解能に優れることである．例えば，NaI は，プラスチックシンチレーターの 10 倍以上の発光量を

もち，1 MeV で数%程度の分解能が得られる（図 7.12 (c) 参照）．第 2 の利点は，放射長が短い（NaI は 2.6 cm，BGO は 1.12 cm）ことで，全エネルギーを測る電磁カロリメーターとしてよく使用される．欠点は有機シンチレーターに比べて遅いこと（減衰時間〜μsec（10^{-6} 秒））と，比較的高価なことである．

iii）シンチレーションカウンターの構造　図 7.18 によく使われるシンチレーションカウンターの基本構造図を示す．

シンチレーションカウンターからの光は，ライトガイド（light guide）と呼ばれる透明なプラスチックを通して光電子増倍管に導かれる．光電子増倍管（フォトマル）は，図 7.19 のような構造をしており，光信号を電気信号に変える装置である．フォトマルの光電面に到達した光は光電効果により，電子（光電子）を放出する．光電面と第 1 陰極，各陰極の間には電圧がかかっているので，電子は加速されて，第 1 陰極に到達し，数個の電子を叩き出す．こうして各段ごとに電子の数は増え，陽極に到達したときには 10^6 から 10^8 個くらいの電子数となっているので，十分な量の電気信号を取り出すことができる．プラスチックシンチレーションカウンターは，時間分解能に優れるので，飛来時間（TOF；time of flight）を測定して速度を知り，運動量情報とあわせて粒子種同定に使われる．

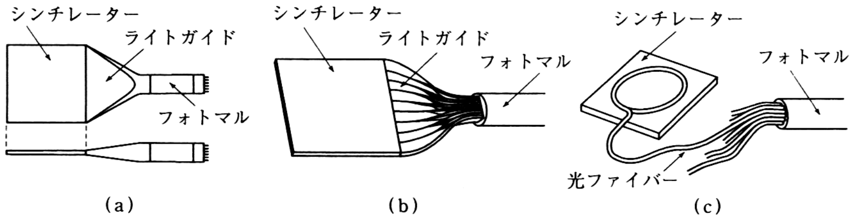


図 7.18　シンチレーションカウンター，ライトガイドと光電子増倍管（フォトマル）の組み合わせ

(a)　最も簡単なライトガイドの例．

(b)　光の輸送率をあげるため工夫した例．シンチレーター光を受ける面積とフォトマルへ渡す面積を等しくしている．いったんライトガイドに入った光は，全反射により輸送されるので途中で失われることが少ない．

(c)　シンチレーションファイバーを使う例．主シンチレーターに溝を切ってファイバーを埋め込み，遠くの場所へ光を輸送する．たくさん重ねる積層構造に適しており，カロリメーターに使われる．

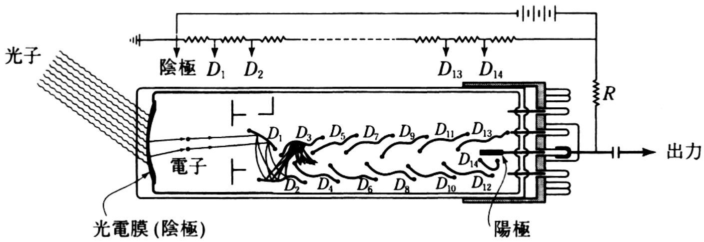


図 7.19 光電子増倍管(フォトマル)の構造と電圧供給回路
光電膜(フォトカソード)に光が当たると,10～20 %の効率で光電子を放出し,管内の正電場で加速されて第 1 段のダイノード D_1 に衝突する.入射粒子 1 個に対し 3～4 個の電子が叩き出されるので次々と増殖し,3^{14}～$4^{14}\simeq 2\times10^8$ に増幅された電子パルスを得る[22].

典型的なプラスチックシンチレーターの比重は約 1 である.したがって,1 cm 厚のシンチレーターを高速の荷電粒子が通り抜けると,約 1.5 MeV のエネルギーを落とす.イオン化エネルギーを平均 30 eV とすると,5×10^4 個のイオン対がつくられるが,生成されるフォトンの数は約 10000 個である.蛍光の平均エネルギー $\langle h\nu\rangle\simeq 3$ eV であるので,エネルギーの約 2 %が光に変換されることになる.発生した光がフォトマルに到達する幾何学的効率を約 10 %,光電面での量子効率を 10 %とすると光電子の平均数は約 100 個である.したがって統計的ゆらぎはだいたい 10 %程度であり分解能もこの程度である.

演習 7.2 減衰時間 10 ns (1 ns$=10^{-9}$ 秒) のシンチレーターからの信号を,幅 10 ns の長方形波で近似して,図 7.19 のような回路で信号を取り出す.利得 (gain;増幅率) を 10^7 とし,$R=50$ オームとするとき ($RC\ll 10$ ns;ただし,C は回路の浮遊容量),200 個の光電子から波高何ボルトのパルスが得られるか?

b. チェレンコフカウンター

i) 基本概念 透明な物体中から発した光信号を取り出すという意味ではシンチレーションカウンターに似ているが,荷電粒子の速度 v が物質中での光速度を超えないと発光しないこと ($\beta=v/c>1/n$),光の放射方向が等方的でなく速度 v に依存するなどの特徴がある.また発光時間が,シンチレーターに比べ原理的にきわめて短く,フォトマルのもつ時間幅によって制限されるのみである.粒子進行方向に対するチェレンコフ光の放射角を θ とするとき,

$$\cos\theta = 1/n\beta \tag{7.129}$$

単位長さあたりのエネルギー損失は，チェレンコフ光の振動数を ν として (7.57) を参照すれば

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{2\pi z^2\alpha}{c}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right)h\nu\mathrm{d}\nu = \frac{2\pi z^2\alpha}{c}\sin^2\theta\ h\nu\mathrm{d}\nu \tag{7.130}$$

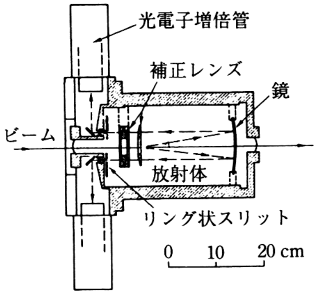
ただし，ze は入射粒子の電荷である．エネルギー損失が $\nu\mathrm{d}\nu$ に比例するということは，波長でいえば，$\mathrm{d}\lambda/\lambda^3$ に比例することであり，紫外から紫の範囲の光が優勢であることを示す．フォトンの数を得るには上式を $h\nu$ で割ってやればよい．周波数領域が小さいときは，$n\sim$const.と見なしてフォトマルの有感領域の ν_1 から ν_2 まで積分して，

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = \frac{2\pi z^2\alpha}{c}(\nu_1-\nu_2)\sin^2\theta \simeq 500\sin^2\theta/\mathrm{cm} \tag{7.131}$$

例えば，$z=1$, $\beta=1$, $n=1.33$ (水) とすると，$\mathrm{d}N/\mathrm{d}x \simeq 200/\mathrm{cm}$ となる．$\lambda=600$ nm ($\mathrm{nm}=10^{-9}$ m) とすると，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}x \simeq 400$ eV/cm となる．イオン化損失は，1 cm あたり $\simeq$1.5 MeV であるから，エネルギーのわずか 0.03 %が使われるのみであり，発光効率はシンチレーションカウンターの 1/100 くらいである．

ii) しきい値 (threshold) **型チェレンコフカウンター** $\beta>1/n$ にならないと発光しないことを利用して粒子の同定をする．例えば電子，μ, π の混在した運動量一定のビームがある場合，$m_e<m_\mu<m_\pi$ であるので，$\beta_e>\beta_\mu>\beta_\pi$ となる．気体の屈折率 $n-1$ は，ガスの圧力に比例するので，2 機のガスチェレンコフカウンターを並べて，1 機は電子のみを，他は電子と μ は数えるが π は数えないように圧力を調整すれば，信号の組み合わせにより 3 種類の粒子を識別できる．

iii) 微分型チェレンコフカウンター $\beta>1/n$ であっても，放射角 θ が速度 β に依存するので，$\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$ のチェレンコフ光のみを数えることにより，$\beta\sim\beta+\mathrm{d}\beta$ の粒子のみを選別することができる．図 7.20 は，CERN のハイペロンビーム (26 GeV の 1 次陽子により，15 GeV の 2 次ビームをつくる) の粒子種を同定するのに使われた微分型ガスチェレンコフカウンター (DISC と呼ばれる) を示す[23]．フォトマルの前に，リング状のスリットを置き，微分



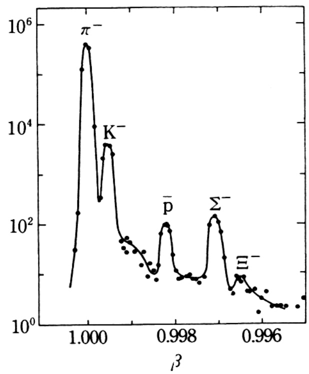


図 7.20 微分型チェレンコフカウンター

(a) ハイペロンビーム中の粒子同定に用いられた微分型ガスチェレンコフカウンター DISC. リング状のスリットにより，ある角度 $\theta \sim \theta+\Delta\theta$ に放出されたチェレンコフ光のみを選ぶ. $\Delta\beta/\beta=5\times10^{-5}$ を達成するために，シリカゲルを使った補正レンズを挿入し，また鏡も特殊形状にしている[23].

(b) 26 GeV 1 次陽子ビームによりつくられた 15 GeV ハイペロンビームにおける速度曲線 (ガス＝N_2 の圧力を変える).

型としている. エネルギーが非常に高く，粒子識別に必要な $\Delta\beta/\beta \sim 5\times10^{-5}$ を実現するために，特殊形状の鏡とシリカゲルの補正レンズを間に入れている. 図 7.20 (b) には，β の関数として (実際には気体 (窒素もしくは炭酸ガス) の圧力を変えて)，各種粒子が検知される様子を示している.

iv) RICH (ring image cherenkov) **カウンター** チェレンコフ光のつくるリングを直接フォトン検出器で見る方法. 図 7.21 に CERN の LEP 加速器 DELPHI 測定器の RICH カウンターを示す[24]. 衝突型加速器実験では，基本的に立体角 4π を覆うような構造につくらなければならないので，構造に制限があり，発光体部で生じたチェレンコフ光のリングパターンを，後に述べる比例箱で検出する. ただし，上に述べたようにチェレンコフ発光効率はあまりよくないので，フォトン数は少なく，図 7.22 のようなパターンになる.

c. 遷移放射検出器 (transition radiation detector ; TRD)

遷移放射は，誘電率の異なる二つの媒質境界を荷電粒子が通過するときに起こる放射である. 放射の原因は媒質中に引き起こされた誘電分極であり，チェレンコフ放射と同じである. 超相対論的 (ローレンツ因子 $\gamma \gg O(1000)$) な荷

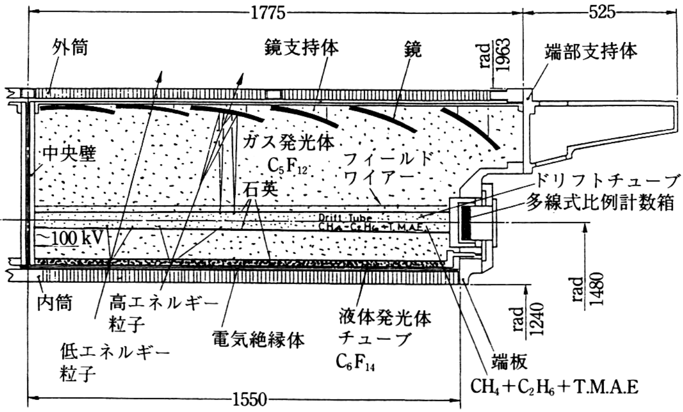


図 7.21 RICH カウンター例[24)]

CERN LEP 実験の DELPHI 測定器に組まれている．機能的に二つに分割され第 1 段は液体 (C_6F_{14}) 発光体，第 2 段は気体 (C_5F_{12}) 発光体を使用して異なるエネルギー領域に対応する．第 2 段のチェレンコフ光は鏡で反射され第 1 段のチェレンコフ光と同じ検出器（ドリフトチューブ，ガスは $CH_4+C_2H_6+$T.M.A.E) で検出する．

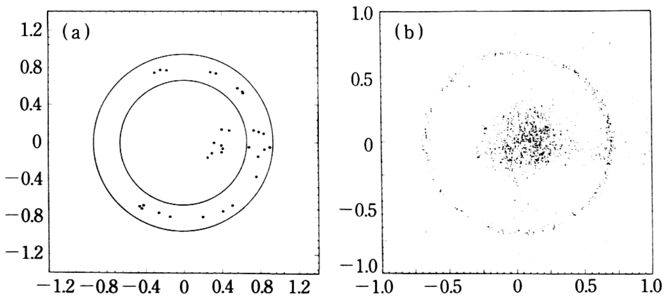


図 7.22 RICH カウンターによるチェレンコフ光受光パターン[24)]

(a), (b) 同じ液体放射体より得られたシグナルを入射粒子と垂直な面に投影したもの．(a) は 1 個の粒子による光，(b) は 246 個の宇宙線ミューオンによるチェレンコフパターン．

電粒子に対して有用である．遷移放射の式は (7.58) で与えられている．$1-n_i \simeq \omega_i{}^2/(2\omega^2)$, $1-\beta=1/(2\gamma^2)$, $1-\cos\theta \simeq \theta^2/2$ を入れると単位立体角に放射される単位振動数あたりの光子エネルギーは，

$$\frac{d^2S}{d\omega d\Omega}=\frac{\hbar\alpha\theta^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{\gamma^{-2}+\theta^2+\omega_1{}^2/\omega^2}-\frac{1}{\gamma^{-2}+\theta^2+\omega_2{}^2/\omega^2}\right]^2 \quad (7.132)$$

ここに，θ は放射角，ω は放射フォトンの振動数，ω_i はそれぞれの物質中のプラズマ振動数 ω_p である．プラズマ振動数は

$$\omega_p=(4\pi\alpha n_e\hbar c/m_e)^{1/2}$$
$$=[(Z/A)\rho(\mathrm{gr/cm^3})]^{1/2}\times 29\,\mathrm{eV} \qquad (7.133\,\mathrm{a})$$

(n_e, m_e は電子の数密度および質量)

で与えられ，誘電率 ε とは

$$\varepsilon=1-\frac{{\omega_p}^2}{\omega^2} \qquad (7.133\,\mathrm{b})$$

の関係にある．全放射エネルギーは

$$S=\frac{\hbar\alpha}{3}\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{(\omega_1+\omega_2)}\gamma\simeq\frac{\alpha}{3}\hbar\gamma\omega_1 \qquad (\omega_1\gg\omega_2) \qquad (7.134)$$

フォトン1個あたりの平均エネルギーは

$$\langle\hbar\omega\rangle=\frac{3}{4\pi}\hbar\gamma\omega_1 \qquad (7.135)$$

で与えられる．例えば，ポリプロピレン ($\hbar\omega_p=19\,\mathrm{eV}$) とヘリウム ($\hbar\omega_p=0.28\,\mathrm{eV}$) の境界を，2 GeV の電子 ($\gamma\sim4000$) が通過する場合，$\langle\hbar\omega\rangle\sim18$ KeV であり，遷移放射は X 線領域にある．遷移放射の特徴として，(7.132)，(7.134) などからわかるように

(1) 遷移放射の全エネルギーは，ローレンツ因子 γ に比例する．

(2) 遷移放射は，前方 ($\theta\lesssim1/\gamma$) に集中する．

が挙げられる．遷移放射検出器をつくるときは，通常物質1を液体または固体，物質2を真空もしくは気体にするので，$\omega_1\gg\omega_2$ が成立する．放射されるフォトンのスペクトルは，$\omega>\gamma\omega_p$ で急速に減少し，低エネルギー側は検出器の検出限界で切断される．切断周波数 ω_c を，$0.15\gamma\omega_1$ にとれば，検出されるフォトン数 N_γ は，

$$N_\gamma(\omega>0.15\gamma\omega_1)\sim0.5\alpha \qquad (7.136)$$

で，一層の媒体で放出されるフォトン数は，$\sim\alpha$ と小さく，実用上数個のフォトンを得るには数百層程度の境界面が必要である．

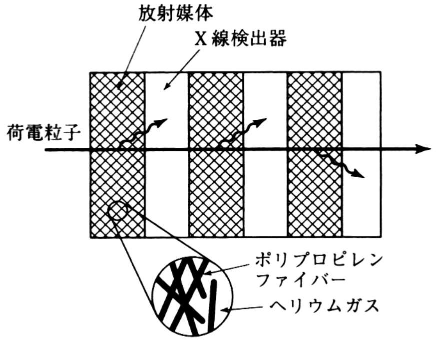
実際の遷移放射検出器は，遷移放射を起こすための放射媒体と放射された X 線の検出器よりなる．多層の放射媒体が必要であるが，放射された X 線の吸収を避けるためには層を薄くしなければならず，薄くしすぎると各層の X

線の干渉効果で強度が落ちる（形成領域（formation zone：～数十μm 程度の厚さ）効果）ので，放射媒体の厚み，間隔を適切に決めなければならない．数十μm 厚の Li の薄膜などを数百層サンドイッチ状に重ねたり，あるいは，ポリプロピレン・ファイバーを層状に積み重ねたものをヘリウムガス中に入れたりする．X 線検出器は，親の荷電粒子の検出器内でのイオン化損失エネルギーをも同時に測定してしまうので，これを十分超えるだけの光量が必要である．図 7.23 は，トリスタン・ヴィーナスグループで用いた遷移放射検出器（放射媒体として，直径 180 μm のポリプロピレンの層を使用した）のエネルギースペクトル[25]で，11 KeV 以上の部分を使った場合，電子検出効率 80％で π 中間子を電子の 10 倍以上落とすことに成功した．

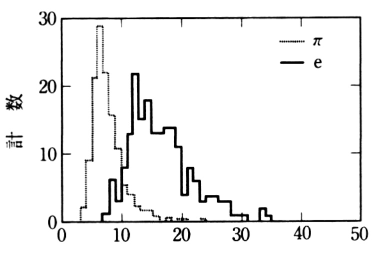
7.4.3 電気信号を使う検出器

a．半導体検出器 (SSD；solid state detector)

シリコン Si またはゲルマニウム Ge のような 4 価の元素の半導体に，5 価の元素 (P, As, Sb) を少量加えると，過剰の電子は容易に遊離され自由電子になり伝導性をもつ（n 型半導体）．一方，3 価の元素 (B, Al, Ga, In) を加えると，共有結合のためには電子が 1 個不足するので，どこからか 1 個借りてきて補充する結果，自由正孔がつくられやはり伝導性をもつ（p 型半導体）．5 価の元素



（a） 遷移放射検出器の構造



（b） 平均パルス波高（keV）

図 7.23 遷移放射検出器

(a) 基本構造

(b) ヴィーナス検出器[25]で得られた遷移放射スペクトル．π 中間子は遷移放射はせず，イオン化損失による信号である．

をドナー，3価の元素をアクセプター，自由電子や正孔をキャリヤーと呼ぶ．

いま，図7.24のように，一つの接触面を境に一方にn型，他方にp型半導体を接触させる(p-n接合)．熱運動により，電子はp型へ正孔はn型の方へと拡散していく．拡散した電子と正孔は，それぞれ相手側の正孔と電子と結合して消滅するので，接合面の両側にはイオン化されたドナーと，アクセプターが残る領域が生じる．これらイオンは動けない格子点であるから，正負の空間電荷分布したがって電場を生じる．この電場は伝導を妨げる向きに働くので，拡散力と釣りあって平衡状態になる．このキャリヤーの存在しない領域を空乏層(depletion layer)と呼び，空乏層によってつくられる電位差を拡散電圧という．空乏層の外は中性であるから電位はほとんど一定である．

いま，図7.24 (b) のように，n型の端に負，p型の端に正の電圧をかけると，拡散電圧を減らすことになるので，n型の電子，p型の正孔が，空乏層を越えて拡散できるようになり，電流が流れる (順方向電圧)．図7.24 (a) のように逆に電圧をかけると電子と正孔は端の方に引かれ，空乏層はより広がって電流は流れない (逆電圧)．

逆電圧を印荷した状態で外から入射した荷電粒子が空乏層を通過すると，軌跡に沿って電子と正孔のペアがつくられ，これが空乏層に存在する電場により，それぞれの電極に引かれて電流が流れるのでパルスが発生する．空乏層の外につくられたペアは，電場が存在しないので拡散によりゆっくり移動するの

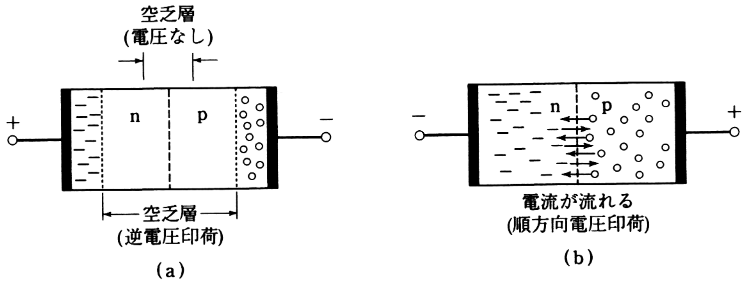


図7.24　p-n接合　(a) 逆電圧，(b) 順電圧
電圧を印荷しない状態では熱拡散で電子がp領域へ，正孔がn領域へ拡散して再結合して消滅する．この結果，伝導電子，正孔が存在しない領域 (空乏層) が生じる．空乏層ではドナー，アクセプターがイオン化した状態である．逆電圧を印荷すると空乏層は広がる．順電圧をかけると電子，正孔は電場に動かされ拡散が可能となり，電極によって次々と電子が供給されるので電流が流れる．

で，遅い成分であり，通常は無視する．p-n 接合は空乏層の厚さだけ離れた 2 枚の極板でつくられるコンデンサーと見なせる．この容量を C とし，p-n 接合につないだ信号取り出し用のアンプの等価容量を C_A とし，集められた全電荷量を Q とすると，パルスの大きさは，$Q/(C+C_A)$ で与えられる．半導体検出器の特色は，不純物のエネルギー準位が伝導帯に非常に近いところにあり，ペアをつくるのに Ge で平均 3.0 電子ボルト，Si で 3.7 電子ボルトしか必要としないことである．通常のイオン化損失ではイオン対 1 個つくるのに平均 30 eV 必要であるのに比べて非常に小さく，それだけたくさんのペアがつくられて，統計精度が非常によくなる．いま 1.5 MeV のエネルギー損失があったとすると，ペアの数は平均 $1.5\times10^6/3.7\simeq4\times10^5$ であり，統計によるふらつきは $1/\sqrt{N}\simeq0.2$ % と小さい．シンチレーションカウンターの幾何学的集光効率なども考慮すると，NaI に比べても 10 倍，プラスチックシンチレーションカウンターに比べると 100 倍も分解能がよい．また半導体検出器を集積回路製作の手法で，細幅（例えば 30 ミクロン）の帯状につくれば，これだけの空間分解能をもった位置検出器としても使用可能であり，高性能測定器としての用途は広い．欠点は大型化がむずかしいことである．

b. 気体検出器

i）基本型　電子やイオンは気体中では高速で動けるから，適当な電圧をかけてやれば簡単に電気信号として取り出すことができる．歴史的に最初に使われた三つの気体検出器，電離箱，比例計数管，ガイガー計数管は，動作電圧条件が違うのみで基本的には同じ構造をしている（図 7.25 (a)）．気体（通常アルゴン (Ar)，ゼノン (Xe) などの貴ガス）を円筒型の容器の中に閉じ込め，真中に金属の芯線を張る．貴ガスを使うのは遊離した電子が陽イオンと再結合しにくいからである．円筒壁を導体（陰極）として接地し，芯線（陽極）に電圧をかけると，各地点で $1/r$ に比例する電場が得られる．いま，粒子が円筒中を通過すると，電子と陽イオンのペアが軌跡に沿ってつくられ，イオンペアの平均数は粒子の損失エネルギーに比例する．電圧がかかっていなければ，電子と陽イオンは再結合して元の中性の状態に戻るが，電圧がかかっていると，電子は陽極に引かれ陽イオンは陰極に引かれて，電流が流れる．

ii）動作モード　電圧が低ければ，生じただけの電子が集められる．最

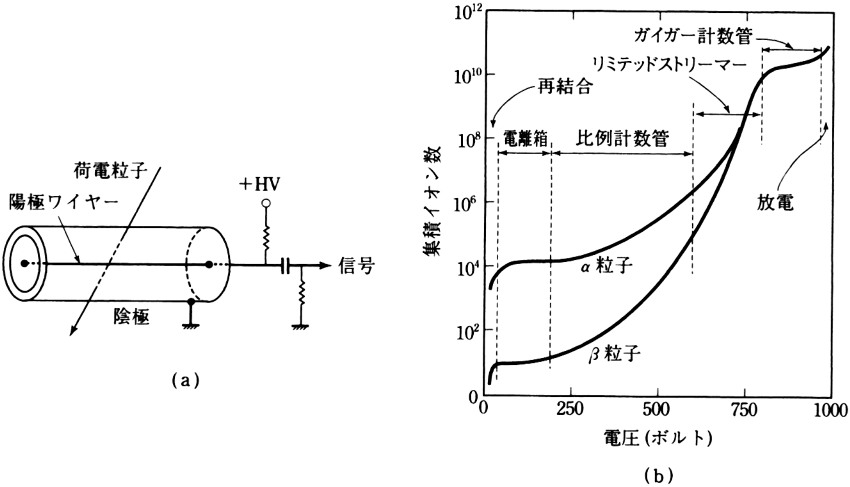


図 7.25

(a)　気体検出器の基本構造
(b)　印荷電圧の違いによる各種検出モードと集められるイオン数.
注入ガス種により曲線は変わる. またリミテッドストリーマーモードは, ガス種によっては出現しないこともある.

終的には陽イオンも集められるが, 遅いので信号としては使わない. この領域 (ionization mode) で動作するものを電離箱という. この場合取り出す電気信号は小さいので, 十分な数の電子イオン対がつくられるようなときのみ用いられる. ある程度電圧を高くすると, 加速された電子は, 気体分子からさらに電子をたたき出すようになる. 芯線の径を小さくすれば, 芯線付近で急勾配の電場が生じ, 2 次電子もまた分子をイオン化できるので増殖が始まりなだれ現象が起きる. 電圧があまり高くなければ, 陽極に集められる電子数は最初の電子数に比例する (比例計数管). 電圧を制御すれば, $10^3 \sim 10^6$ くらいの増幅が可能であり十分大きな電気信号として取り出せる. さらに電圧を上げると, 増殖によってつくられた電子・陽イオン対のつくる空間電荷によって元の電場が歪むため比例関係は失われる (limited streamer mode). ただし, ストリーマーモードは出力電圧が高いため電子回路による増幅器を必要としない利点がある. このときまでは, なだれは局所的に起きているが, これ以上電圧を上げると, なだれが全容器中に広がってしまい, 出力信号は飽和して, 入力信号の大きさに関係なく一定振幅の出力信号を出す. これがガイガーカウンターであ

る．なだれが広がるのは，励起された分子が元の状態に戻るときに出す光が空間的に離れたところの分子を励起するためである．この場合，放電を止めるために光を吸収するクエンチガスを混入する必要がある．ガイガーモードは回復時間が長いため，高頻度の実験には適さない．電圧と出力電子数の関係，および使用モードを図 7.25 (b) に示す．

iii) 電離箱　ガス電離箱は，出力信号が小さいので，現在では特殊な用途以外はあまり使われないが，気体の代わりに液体を使用すると，十分な数の電子が得られるので高エネルギー実験でカロリメターとして使用される．

液体の場合，不純物，例えば酸素のようなものがあると電子が捕捉されて電極に到達しない．このため使用例は，アルゴンや，ゼノンのような貴ガス液体にほぼ限られる．この場合でも酸素混入率を ppm (parts per million $=10^{-6}$) 以下に抑えなければならない．高エネルギー実験では有利な点がいろいろあるので，よく使われるが，液体状態で保持するためには冷却容器 (cryostat) 中に納めねばならず，この部分が不感領域となる．この不感領域を除くため，常温で使用できるいわゆるウォームリキッド (TMP, TME などと呼ばれる有機液体) の開発が盛んである．

iv) 多線式比例箱 (MWPC ; multi wire proportional chamber)　1968 年にチャルパックによって発明された多線式比例箱は，軌跡検出器の性能を飛躍的に増加させた[26]．高精度，高速粒子軌跡検出器として高エネルギー物理学を大きく発展させ，さらに X 線電子線造影機として天文学，結晶学，医学などに広い応用をもつ．この功績でチャルパックは，1992 年のノーベル物理学賞を受賞している．基本構造は，図 7.26 (a) に示すように，等間隔に並べたたくさんのワイヤーを，2 枚の陰極板の間に置き，陽極（ワイヤー）と陰極の間に電圧をかけ，比例計数モードで使用する．電気力線は図 7.26 (b) のような形をしており，各ワイヤーがそれぞれ独立な比例計数管のように働く．粒子が極板に垂直に通過すると，軌跡に沿ってつくられた電子対は間近のワイヤーに集められるので，ワイヤー間隔で決まる位置精度が得られる．

典型的な動作例としては，ワイヤー間隔 0.5～2 mm，極板間隔 1.5～2 cm，電圧 $\simeq 3\sim4$ kV，ワイヤー径 10～50 μm である．このとき，電場勾配は $\varepsilon = 10^4\sim10^5$ V/cm となり，増幅率は 10^4 程度である．空間分解能として 0.5 mm

くらいまで得られている．気体としては，アルゴンに10％程度のメタンをクエンチ剤として混ぜたもの，あるいはマジックガスといわれるもの（アルゴン(Ar)75％＋イソブタン(C_4H_{10})24.5％＋フレオン13(CF_3Br)0.5％）がよく使われる．

通常は，2面使用し x 座標と y 座標を決める．多数の粒子が一時に入ったときに区別するための u, v 座標（x, y に対し斜めにセット）を加え3または4面で一組をつくる場合もある．陰極を1枚の金属板にする代わりに帯状の金属シートを並べると（ストリップという），陰極に誘起された信号を読み出すことにより，1面のMWPCで，xy 座標が決められる．MWPCのパルス立ち上がりは速く，立ち下がりはイオン移動速度と計数箱のサイズで決まるが数mm間隔ならば25～30nsecときわめて速いので，時間情報を得るのにもしばしば使われる．さらに1本の線の1mmあたり～10^4/secという高強度粒子照射条件下でも作動する．

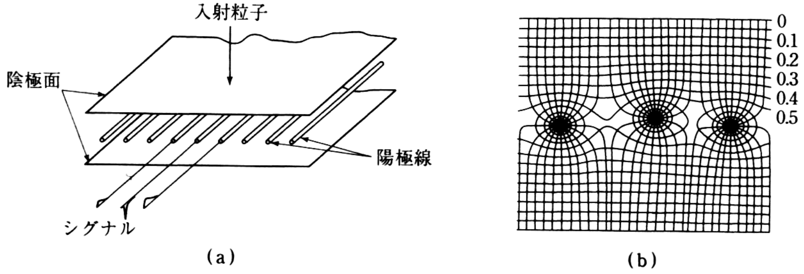


図7.26　多線式プロポーショナルワイヤーチェンバー(MWPC)の模式図(a)とMWPCのつくる電気力線とポテンシャル
(b) HVワイヤーが正位置よりずれるとどう歪むかもこれでわかる．

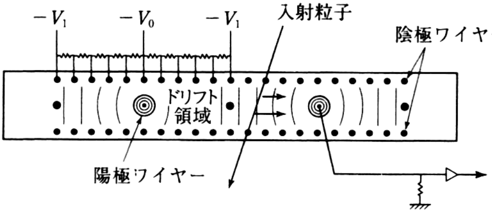


図7.27　ドリフトチェンバーの基本形
陽極と陰極の間に一様な電場勾配が得られるよう適正電圧を配置する．入射粒子によりつくられたイオンは陽極ワイヤーに向かいドリフトしていく．ドリフト時間から陽極までの距離がわかる．

v) ドリフトチェンバー (drift chamber ; DC)　基本型は，図 7.27[27] のように，陽極を接地し，陰極に $-V_1$ をかけ，陰極から陽極に向かって一様な電場が発生するように，それぞれのフィールドワイヤーに適当な傾斜電圧をかける．粒子は上から下へ通過するように配置する．一定電場の領域では電子の移動速度が一定であるので，粒子の通過時間が別の方法でわかれば，電子が陽極に到達するまでの時間を測ることによって，粒子の通過位置を知るものである．陽極付近の電場分布は，MWPC と同じである．一様な電場のところは～1 kV/cm で，電子の移動速度は 4-5 cm/μsec であり，移動距離は 1～10 cm くらいである．時間測定精度は～2 ns (10^{-9} 秒) であるから位置精度は～100 μm である．ドリフトチェンバーは，磁場の中で使用して粒子の運動量を決めるのによく使われる．磁場中では移動電子は磁場によるローレンツ力を受けるので，これを修正するために磁場の強さに応じて，電場の向きが変わるように電圧のかけ方を変える．動作原理は MWPC と同じなので，時間応答，高強度照射に対する条件もまた MWPC と同様である．ドリフトチェンバーには，ヴァリエーションがたくさんあるので，応用例については後述する．

7.4.4 機能別使用法

放射線粒子検出器を使って得たい情報は以下のように分類できる．

(1) 通過時刻 t：短い時間間隔で起きる事象を区別したり，また 2 カ所での時間測定により速度を決定するのに用いられる．最も一般的なものにシンチレーションカウンターがある (時間分解能 $\Delta t \simeq 100 \sim 200$ psec ($1\,\text{psec} = 10^{-12}$ sec))．

(2) 通過位置 x：粒子の飛跡測定，運動方向や反応のパターンなどを知る．また，磁場中での曲率を測ることにより運動量を知る．多線式比例箱 (MWPC；位置分解能 $\Delta x \sim 1$mm) やドリフトチェンバー (DC；$\Delta x \sim 100 \sim 200$ μm) などがある．また特に精度の良い位置測定 (10～100 ミクロン) には，半導体検出器 (solid state detector ; SSD) が用いられる．

精度はそれほど必要としないが，位置情報を素早く知りたいときは，シンチレーションカウンターを短冊型に並べるホドスコープが使用される．事象のトリガー (頻発する反応の中から欲しい事象を選んで，データ取り込みの起動を

掛けること）や初期選別に使用される．

（3） エネルギー運動量 $E, \boldsymbol{p}$：粒子が検出器を通過する際のエネルギー損失を測る $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ カウンター，全エネルギーを測るレンジ (range) カウンターやカロリメターなどがある．運動量を知るには，磁場の中で粒子が描く円軌道の曲率を測定する．

（4） 粒子同定 (particle identification ; PID)：運動量 p と速度 v がわかっていれば，$m=p/v\gamma$ により質量がわかる．また粒子が生成する反応のパターンで粒子同定を行う場合もある（例：長い軌跡 → μ，電磁シャワー → e, γ, V字形パターン → K^0, Λ，短い寿命 → τ, c, b)．多体系では，各粒子のエネルギー E_i と運動量 $\boldsymbol{p}_i$ がわかっていれば，不変質量：$(mc^2)^2=(\sum E_i)^2-(\sum \boldsymbol{p}_i c)^2$ が計算できる．

以下順に，機能別の使用例を示す．

a. 運動量測定

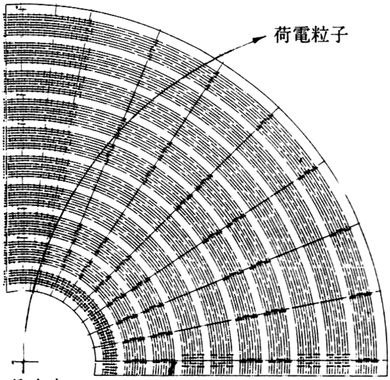
運動量 p をもつ荷電粒子は磁場の中で円運動をするので，(7.14) によって曲率半径 R を測定すれば，運動量が測定できる．ただし，測定できるのは運動量の磁場に垂直な成分（横運動量 p_T）である．全運動量 p は，磁場の向きに対する角度がわかっていれば求められる．また曲率半径を測るために軌跡検出器を磁場中に置き，粒子の通過距離を L とすると，横運動量と曲率半径 R との関係，分解能は

$$p_T=0.3BR$$

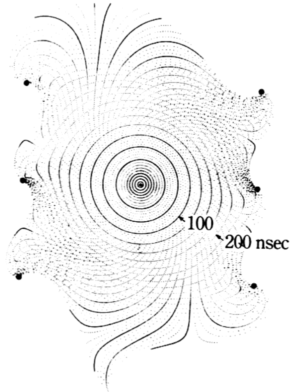
$$\delta p_T/p_T=\frac{0.027p_T \Delta s}{BL^2} \tag{7.137}$$

で決まる．単位は p_T を GeV/c, Δs を mm, B をテスラ，R, L を m で計る．Δs はサジッタと呼ばれる量で，円弧を 3 点で測定したとき，端の 2 点がつくる直線と中の点との距離である．この式から，磁場の強さ B および通過距離 L を大きくするほど，また軌跡の位置分解能を向上させるほど運動量分解能が上がることがわかる．図 7.28 は，トリスタンの VENUS 測定器に組み込まれた円筒型のドリフトチェンバーであり[28]，円筒の中心軸に沿って，ワイヤーが張ってある．一つの単位は，1 本の陽極ワイヤーと 8 本のフィールドワイヤーよりなる．このドリフトチェンバーは，電場が同心円状をしていて，位置

決め精度が入射角によらないという利点がある.



(a)



(b)

図 7.28 磁場内ドリフトチェンバーによる運動量測定の図[25)]
(a) トリスタン・ビーナスの中央軌跡検出器, (b) 1セル内の電気力線と等電位面. 各層は3面ごとに組となっていて, 1面は次の面と1/2セルずらしてある. 1セルの時間情報のみでは左右の区別がつかないが, 1/2セルずらした2面の情報により2点を結ぶベクトル情報が得られる. 第3面はビーム軸に対し3.3°傾けてZ情報を得るのに使う.

b. エネルギー測定

カロリメーター[17,20)]は, カスケードシャワーによって全エネルギーを知る測定器の総称である. カロリメーターは, ミューオンとニュートリノ以外のすべての既知の粒子のエネルギーを測定でき, シャワーを起こさないことによりミューオンを識別できる. 中性粒子の検出とエネルギー測定が可能であり, クォークやグルーオンなどのジェット現象の観測に向いている. モジュラー化により大立体角を覆うことが容易であり, 測定器の奥行き (厚さ) がエネルギーとともに $\ln E$ でしか大きくならないなど, 最近の高エネルギー衝突型加速器実験に不可欠の要素になっている.

i) 全吸収型チェレンコフカウンター　シャワーの検出要素が連続一様なものの例としては, 鉛ガラス全吸収型カロリメーターがある. 鉛ガラスは, 密度が大きく放射長も短いので (比重~5, 放射長~2 cm), 15~20X_0の長さをもつ鉛ガラスカウンターの中では, 電子やフォトンはシャワーを十分発達させ

て全エネルギーを落とし，軌跡の長さに比例するチェレンコフ光を発するので，電磁カロリメーターとして使える．このほかに NaI, CsI, BGO などを使うこともあるが，すべて電磁シャワーカロリメーター用である．

ii） サンプリングカロリメーター ハドロンカロリメーターでは，上に述べたような全吸収型カロリメーターはサイズが大きくなりすぎて実用的でない．経済性の観点からよく使われるのが，吸収体（鉛もしくは鉄）と検出体の多層サンドイッチカロリメーターである．検出体としてはプラスチックシンチレーターと液体アルゴン比例計数箱がよく使われる（図 7.29）．シャワー発達の様子も知りたいので，理想的には各層ごとに読み出したいところであるが，経済性から数カ所または 1 カ所にまとめる．死角をなくして大立体角のカロリメーターにするには，図 7.29 (a) の構造ではライトガイド（光導出部）が邪魔になる．またシンチレーターはしばしば磁場の中に配置するので，そのままでは光電子増倍管が働かない．そこで，実際の使用に当たっては，図 7.29 (b) のように第 2 のシンチレーターに光を導く．第 1 のシンチレーターに紫に近い光を出す蛍光剤（POPOP など），第 2 のシンチレーターには紫を吸収して赤に近い光を出すような蛍光剤（BBQ）を選ぶ．赤色光は紫色光より透過率が高いので，第 2 のシンチレーターから他の検出器に邪魔にならず，かつ磁場の影響の小さいところまでライトガイドで導いて，光電子増倍管につなげる．光は全反射で伝わるので，第 1 と第 2 のシンチレーターは光学的に接触しないよう間に空気層を入る．最近は，シンチレーションファイバーを主たるシンチレーションカウンターに溝を切って埋め込む方式が使われるようになった（図 7.18 (c) を見よ）．

電磁カロリメーターとハドロンカロリメーターの差は基本的には放射長と吸収長の違いであるので，シャワー発生物質（典型的には，電磁カロリメーターでは鉛，ハドロンカロリメーターでは鉄を使う）とサンプリング率は独立に決める必要があるが，形としては同一にできる．電磁カロリメーターに例えば鉛 $20X_0$ を使っても，吸収長 λ としては 0.65λ にしかならないので，通常は電磁カロリメーターを前に置き，後方にハドロンカロリメーターを位置させる．

iii） カロリメーターの分解能 カロリメーターはシャワーという統計現象を利用する．検出されるシャワーの軌跡全長が，エネルギー E に比例するので，

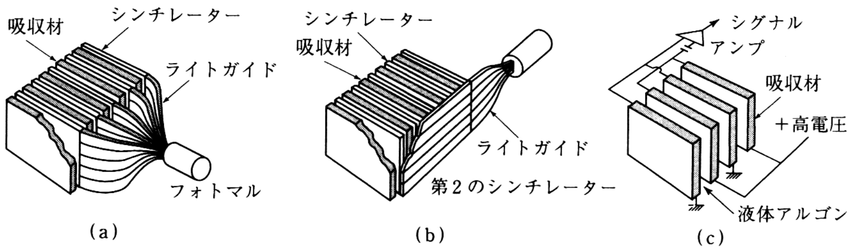


図 7.29 サンプリング・カロリメターの概念図
(a) 基本型. 吸収材（シャワー発生体＝鉛または鉄）とシンチレーターのサンドイッチ. 各シンチレーターからの光はライトガイドで1つにまとめ光電子増倍管へ導く.
(b) 衝突型加速器実験用. 全立体角を覆う必要から死角をなくすため第2のシンチレーターとライトガイドを使って後方に光を導く. 図 7.18 (c) のようにシンチレーションファイバーを使うこともある.
(c) 検出体として液体アルゴン電離箱を使った場合の原理図. 吸収材がクライオスタット（冷却容器）に入れた液体アルゴン中に浸っている.

シャワーが検出器の中に十分閉じ込められれば，分解能のエネルギー依存性は統計のポアソン分布のゆらぎを考慮すると $\sim 1/\sqrt{E}$ である．サンプリングカロリメターでは，金属板の層厚 d に比例して統計数が悪くなるので，結局，相対分解能 σ/E は

$$\frac{\sigma}{E}=k\sqrt{\frac{d}{E}} \tag{7.138}$$

で与えられる．

上の議論でわかるようにハドロンカロリメターは低エネルギー ($E \lesssim 10$GeV) では精度が悪い．一方，磁場を使う方法の運動量分解能は運動量が大きくなると運動量に比例して悪くなる．つまり，エネルギーの低い領域では磁場による運動量測定の精度がよく，エネルギーが高くなるとカロリメター手法の精度がよくなるので，最近の衝突型実験測定器は両者を組み合わせることが多い．

c. 質量同定

i) TOF の方法　　チェレンコフカウンターを使う粒子同定法については，すでに述べた．このほかに，2組以上のシンチレーションカウンターによって，飛行時間 (time of flight ; TOF) を決める方法もよく使われる．速度情報に運動量情報を組み合わせて粒子同定ができるのである．図 7.30 はトリスタン VENUS 測定器の TOF カウンター ($\Delta t=200$ psec ; 1 psec $=10^{-12}$ sec)

が，どのくらいの性能をもつかを示す．飛翔距離 175 cm で $p \lesssim 1$ GeV/c では粒子種が分かれるのが見える．

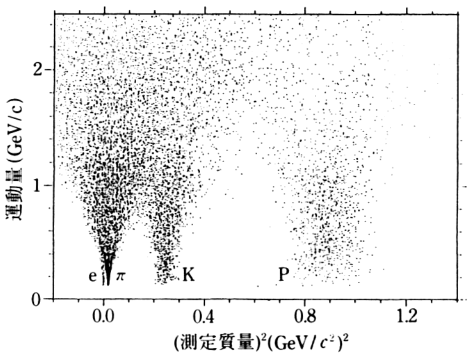


図 7.30 TOF (time of flight) 法による粒子同定
トリスタン・ビーナス測定器の例 ($\Delta t = 200$ psec，$L = 175$ cm)

ii) *E*/*p* の方法　運動量解析により p を決め，次いで電磁カロリメターでエネルギー E を測定して，E/p を算出する．電子では $E/p \sim 1$ であるが，π などのハドロンは，電磁カロリメターにほとんどエネルギーを落とさないので，$E/p \ll 1$ となり，電子をハドロンジェットの中から選別するのに用いられる．最近では電子とハドロンのシャワー発達形態が違うことも考慮して，電子の検出効率はほとんど落とさずに ($\varepsilon \gtrsim 90$ %)，e/π の比を $10^3 \sim 10^4$ 倍減少させることが可能となっている[21]．

iii) d*E*/d*X* の方法　この方法を最も効果的に使うのが TPC (time projection chamber) であるので TPC の説明をする．構造的にはドリフトチェンバーの応用である．図 7.31 のような円筒構造をしており，中央の仕切が薄い極板で，円筒の両端 (端板部) との間に電圧をかけて，円筒軸に沿って一様な電場が発生するようになっている．通常は，電子陽電子ビームが中心軸に，衝突点が中央にくるように配置し，磁場を円筒軸に平行にかける．反応の 2 次粒子は中心から出てくるので，全立体角を覆う 4π 検出器である．トリスタンのトパーズ (TOPAZ) 測定器に使われた TPC では，円筒の径 2.6 m，長さ 3 m にもなり，中心に負の電圧 43.25 kV をかけている[29]．粒子の軌跡に沿って発生した電子イオンは，中心軸 (z 軸) に沿って，一定速度で端板部に向かって

移動する．端板部は台形に分割し，陽極ワイヤーを張り MWPC とし，電子を受けて信号を出す．これにより r 座標が決まる．陽極の反対側には間隔をおいて陰極を置く．これは切片 (pad) を並べた形になっており，誘起された電圧を読み取れば陽極ワイヤーと垂直方向の座標（ϕ 座標）がわかり，陽極に到達する時間から z 座標がわかる．陽極での信号の大きさは，粒子の注入ガスとの相互作用によるエネルギー損失に比例するから 1 本の軌跡について，ワイヤーの数だけの 3 次元座標とイオン化損失量 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ が求まる．一つの粒子について，イオン化損失を陽極線の数だけ何回も測定しているので $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ 測定の統計精度は非常によい．軌跡の磁場の中での曲率から運動量がわかるので，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ と組み合わせて粒子の種類がわかる（図 7.32)．現在最も精巧な測定器であり，一つの測定器で多重軌跡の 3 次元的座標，運動量の測定と同時に粒子の識別も可能な汎用測定器である．情報量は泡箱に匹敵するほどあり，しかも高速である．電子陽電子衝突型加速器実験用測定器として大きな威力を発揮する．このように強力な検出器であるが，電子が端板に到達する時間が長く (30～50 μsec)，繰り返し頻度が高いような実験，例えば陽子衝突型加速器実験では使用方法に限界がある．

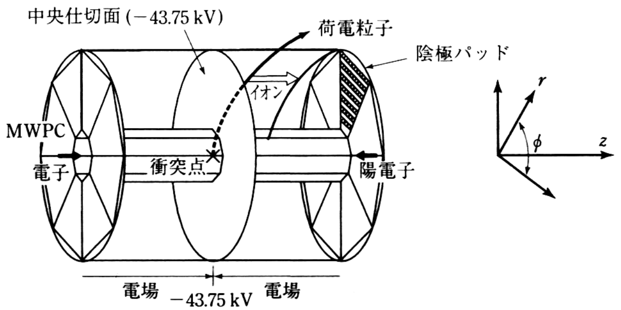


図 7.31 トリスタン・トパーズ測定器中の TPC 概念図[29]
円筒径 2.6 m，長さ 3 m．磁場の方向に中心軸を合わせる．衝突点から出た荷電粒子によりつくられるイオンは電場に引かれて端板部に向かう．端板部には 8 個の台形状の MWPC があり，r 情報が得られるように陽極線を張ってある．陽極線の裏側には線に沿って陰極パッドが張ってあり，誘起電圧で ϕ 情報が読めるようになっている．陽極線に集められるイオンの到着時間から z 情報，イオン数から $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ 情報が得られる．軌跡を 3 次元的に構築し，その曲率より運動量が得られ，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ と合わせて粒子同定を行う．

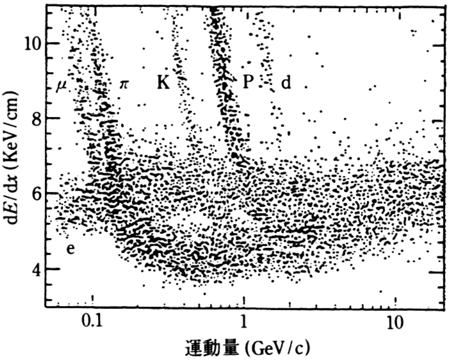


図 7.32　トパーズ（図 7.30）の TPC により得られた dE/dx データ[29]
図 7.10 (b) の曲線を再現している．

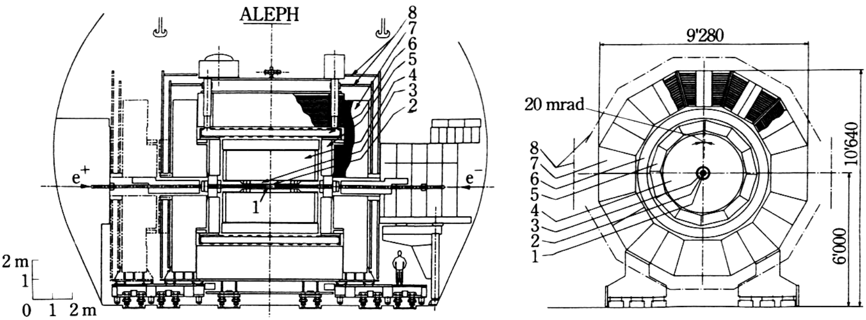
7.4.5　コライダー実験用測定器

a．基本概念

現代の測定器はこれらをさまざまに組み合わせた総合検出器である．衝突型加速器実験で使用される測定器はかなり普遍的な特徴と性質をもっているので，衝突型実験測定器の典型例として，ここでは ALEPH 測定器について述べる[30]．ALEPH 測定器は，Z^0 共鳴の精密測定に使用された測定器の一つであり，衝突型実験測定器一般の性質を備えている．図 7.33 に ALEPH のビーム軸に沿った切断図とビーム軸に垂直な切断図を示す．図 7.34 にコライダー測定器の一般概念図（ビーム軸に垂直な面での切断図）を示す．基本的な検出器要素と粒子の振る舞いを模式的に書いてある．

各種衝突型実験測定器に共通する特徴を二三述べておこう．衝突型測定器の第 1 の特徴は，汎用性（general purpose）でどのような反応に対しても（もちろん完全には無理であるが，予想しうる反応の 90 %には）対応できることである．第 2 はそのための必要条件として，粒子がどの方向に飛び出そうとも，その粒子種を同定し，エネルギー運動量解析能力を同水準かつ高レベルで機能させることにある（一様性；uniformity)．測定器で同定できる粒子種は，e（電子または陽電子），γ（および π^0），μ，荷電ハドロン（ほとんど $\pi^\pm$），および中性ハドロン（中性子もしくは K^0 中間子，Λ など）と ν である．測定器を

ビームの横から眺めた図（図7.33）からもわかるように，測定器のビーム軸に直角方向（$\sim 45° \lesssim \theta \lesssim \sim 135°$；バレル部；Barrel region という）の部分と，前後方（数度$\lesssim \theta \lesssim \sim 45°$；端末部；end cap region）部分では，幾何学的に別構造となる．測定器建設の観点からはかなり異質な取り組みを要求されるが，性能設計の考え方としては一様性に眼目をおく．第3は密閉型（hermetic）をしていることである．基本的にはビーム軸方向の超前方方向を除いては全立体



1：ビームパイプ，2：半導体検出器，3：内軌跡検出器
4：TPC，　5：電磁カロリメター，　6：超伝導コイル
7：ハドロンカロリメター，8：ミューオンチェンバー

(a)　　　　(b)

図 7.33　ALEPH 測定器[27)]
(a)　ビーム軸に沿った断面図
(b)　ビーム軸に垂直な断面図

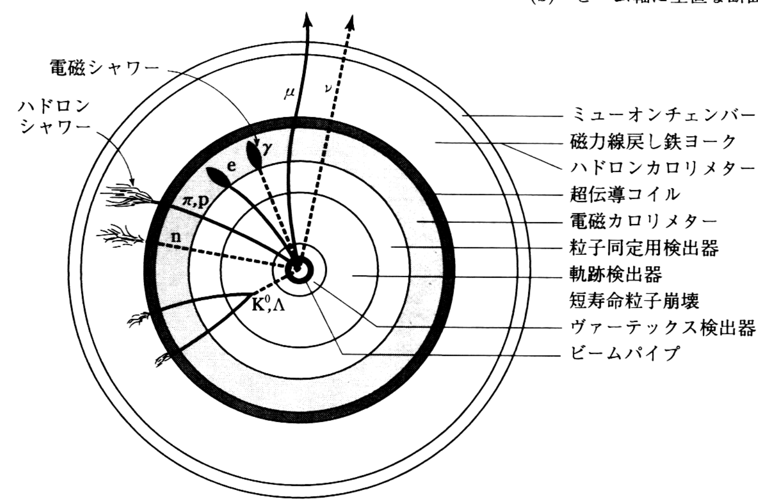


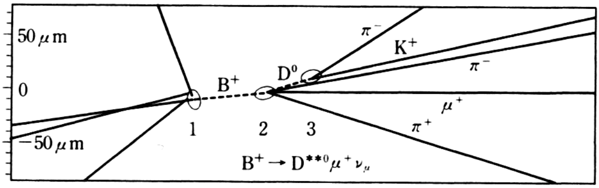
図 7.34　衝突型加速器の汎用測定器概念図
ビーム軸に垂直な断面図．点線は測定器では見えない粒子の軌跡を示す．
電磁カロリメターはコイルの外側に置くこともある．

角をカバーすることであり，少なくもビームと垂直方向については，ニュートリノ以外のすべての粒子のエネルギー運動量成分を測定する．これにより後に述べる見えない運動量の測定が可能となる．

次に，各種の測定器が如何に組み合わされ，総合してどうシステムとして働くかを説明しよう．

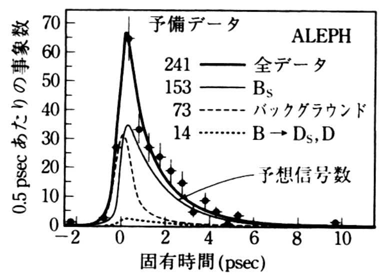
b．反応点，崩壊点測定

ビームがパイプやビーム管中の残留ガスなどと衝突して生じる反応は不要の雑音である．これを除去するためには，複数粒子の軌跡を逆にたどり反応点を決める．運動量解析のための軌跡検出器でも反応点復元は可能であるが，寿命の短い粒子の崩壊点を測定するための高精度軌跡検出器を併用することが多い．例えば，重いクォーク (c, b) を含む C, B ハドロンは，$\tau=10^{-12}\sim10^{-13}$ 秒



(a) 反応事象再現例：B_S メソンの寿命測定(ALEPH)

$\tau=1.64^{+0.16}_{-0.14}\pm0.04$ ps



(b)

図 7.35 ヴァーテックス検出器の使用により，b クォークを同定する[31])

(a) b, c 粒子の識別例：
$e\bar{e}\rightarrow B^+X$, $B^+\rightarrow D^{**0}\mu^+\nu_\mu$, $D^{**0}\rightarrow D^0\pi^+\pi^-$, $D^0\rightarrow K^+\pi^-$
相互作用点 1, B^+ の崩壊点 2, D^0 の崩壊点 3 が見える．

(b) b-ヴァーテックスの固有時分布．ダッシュ線がバックグラウンドでほぼ左右対称分布，実線が B 崩壊のシグナルで，太線およびデータ（✦）は両者の合計．

の寿命をもち，距離にして $c\tau\gamma$＝数十～百 μm 位の飛跡を残すので，半導体検出器を使い崩壊点を決定して，重いクォークの同定や寿命測定を行う．軌跡から復元した反応点を，第1次ヴァーテックス，崩壊点を第2,3次ヴァーテックスと呼ぶ．ALEPH では $r\phi$ 方向で 10 μm，z 方向では 20 μm の位置精度を実現している．図 7.35 にこうして短寿命粒子の崩壊曲線を測定した例をあげる[31]．

c. 運動量解析

荷電粒子に対しては，磁場の中での円運動軌跡の曲率を測定して運動量の測定を行う．通常磁場は対称性のよいソレノイドコイルでつくられる．ALEPH では TPC を用い，B＝1.5 T（テスラ），$\varDelta s$＝100 μm（ミクロン）を得て，L＝1.4 m の軌跡に対して，$\delta p_T/p_T^2=0.0009(\mathrm{GeV/c})^{-1}$ を実現している．低エネルギーでは，多重散乱が分解能の限界を与えるので，粒子の通過する物質量をなるべく少なくするため，また磁場中を通過する距離 L を稼ぐため軌跡検出器は測定器の内側中心部を占める．

d. エネルギー検出器

軌跡検出器および超伝導コイルの外側はモジュラー化されたエネルギー検出器（カロリメター）よりなる．一つのモジュールは通常一定間隔のラピディティ ($\varDelta\eta$)，方位角 ($\varDelta\phi$) を受けもつように配置される．ラピディティ（または疑似ラピディティ，$\eta=(1/2)\log[\cot(\theta/2)]$）で一定間隔とするのは計数率の大部分を占める QCD 事象が各モジュールごとに一定の割合でくるようにするためである．ALEPH の場合は，モジュールサイズを $3\times3\ \mathrm{cm}^2$，角度にして $0.8^\circ\times0.8^\circ$ の格子状配置としている．この結果，シャワー発生点の位置精度 1.5 mm を実現した．カロリメターは衝突点に向かって，前方が電磁カロリメター，後方がハドロンカロリメターと機能的に2分割されている．電磁カロリメターは，23 放射長の厚さをもつ鉛/シンチレーションカウンターのサンドイッチ，ハドロンカロリメターは 5～10 cm の鉄／ストリーマーチューブのサンドイッチ（全吸収長 (nuclear interaction length) 7.16，鉄にして～1.2 m）である．ハドロンカロリメターの鉄は磁力線を戻すためのヨークをもかねている．既述したように，軌跡検出器で運動量 p を測定し，電磁カロリメーターで測定したエネルギー E との比をとることによって，電子とハドロン（ほと

んど π) との分離ができる．ALEPH では電子シグナル中の π の混入率を 10^{-3} 以下におさえた．エネルギー分解能 σ/E は電磁カロリメーターが $[1.7+19/\sqrt{E}(\mathrm{GeV})]\%$，ハドロンカロリメーターが $[\sim 60/\sqrt{E}(\mathrm{GeV})]\%$ である．

e. 粒子同定

実験の目的によっては，電子を多量のハドロンの中から拾い出したいときの遷移放射検出器，ハドロン種 (π, K, 陽子など) を区別したいときの RICH カウンターなど，粒子同定のための特別の測定器を挿入する．ALEPH では，TPC が軌跡測定と粒子同定を兼用しているが，通常は，軌跡検出器の外側，カロリメターの内側に位置させる．

f. ミューオン同定

コイルおよびカロリメターを過ぎて，最外殻はミューオン検出器で，十分厚い吸収層 (通常は電磁石のヨークにかねさせ，吸収長 $\gtrsim 10\lambda$ とする) とその前後に配置した軌跡検出器よりなる．ミューオン以外の粒子は (ニュートリノは別として) 吸収層を通過できないから吸収層の後まで通過した粒子はミューオンと同定できる．偽信号は π がカロリメターに吸収される前に崩壊してできるミューオンとカロリメターを通過してなお生き残るわずかなハドロン成分 ($<1\%$) のみとなる．

g. 見えないエネルギー

重心系では，全運動量の和は 0 である．すべての荷電粒子と中性粒子のエネルギーベクトル (エネルギーと方向が測定できる) のベクトル和の符号を逆にしたものを，見えないエネルギーのベクトルと定義する．ただし，個々の粒子の同定は不可能であるので，すべてを質量 0 の粒子と見なし，個々の粒子に関してはエネルギーベクトルと運動量ベクトルは同じとする．ニュートリノが放出されたとわかっているときは，これがほぼニュートリノのエネルギーを与える．大統一理論などで必要とされる未知の新粒子，たとえば中性の超対称性粒子 (ニュートラリーノ) なども見えないエネルギーを与えるので，見えないエネルギーを精密に測定することは非常に重要である．これが密閉性 (hermeticity) を重要視する由縁である．それでも，ビームパイプに逃げる粒子は防げず，ビーム軸に垂直な E_T 成分についてのみ測定できる．

h. ルミノシティ測定器

主検出器とは別に，カロリメーターと軌跡検出器の組合せよりなる小立体角のルミノシティ測定器を前後方に配置して，素性のよく知れた反応（電子陽電子衝突型加速器の場合は，小角度のバーバー（Bhabha scattering：電子と陽電子の弾性散乱））を測定する．バーバー散乱断面積はQEDで計算可能であるので，計数率からルミノシティを逆算する．測定断面積の絶対値を知りたいときに使う．

i. ま と め

コライダー実験用の汎用測定器は，上に述べたような性能をすべてもち，だいたいは同じ構造をしている．特に，全エネルギー $\sqrt{s}$ が決まっていると主眼とする測定対象が絞られるので，測定器の構造や性能の類似性がきわだって高くなる．例えば，LEPI加速器では，$\sqrt{s}=91\,\mathrm{GeV}$ であり，ALEPH，DELPHI，L3，OPALと四つの測定器が建設されたが，ここではZボソンの質量や崩壊幅，崩壊モードの精密測定など，標準理論の検証に重要と誰もが考える現象に対しては，どの測定器で測定しても物理の成果という観点からは，差は大きくないと考えてよい．しかし，それ以外の現象に関しては，詳細に調べたい物理内容はグループにより異なる．例えば，レプトンを含む崩壊モードを精密に調べたいときと，ハドロンを調べてQCDの精密検証をしたいときとでは，各部測定器の性能についての重点のおきかたが異なる．また，その結果として，新現象発見の潜在能力や各種モデルの検証に対する感度に差がでる．一見むだにみえるところにどれだけ力を注ぐかは，実験家の研究方針を強く反映しているのである．

参 考 文 献

1) M. Livingstone and J. Blewett : Particle Accelerators, McGraw-Hill (1962)
2) J. Lach and L. Pondrom : *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **29** (1979) 203
3) H. Fisk and F. Sculli : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **32** (1982) 499
4) J. Drees and H. Montgomery : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **33** (1983) 383
5) J. Sanford, The Fermi National Accelerator Lab. : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **26** (1976) 151

6) C. Pellegrini : *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **22** (1972) 1
R. Kohaupt and G. Voss : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **33** (1983) 67
7) L. Evans, E. Jones and H. Koziol : The CERN $\bar{p}p$ Collider from Proton-Antiproton Collider Physics., eds., G. Altarelli and L. DiLella, World Scientific (1989) 1
8) Review of Particle Properties, Particle Data Group, *Phys. Rev.*, D**54** (1996) 1
9) Experimental Techniques in High Energy Physics, ed. T. Ferbel, Addison-Wesley (1987)
K. クラインクネヒト著, 高橋嘉右, 吉城　肇訳：粒子検出器, 培風館 (1987)
加藤貞幸：放射線計測, 培風館 (1994)
10) W.R. Lee : Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer-Verlag (1987)
11) Livingstone Bethe : *Rev. Mod. Phys.*, **9** (1937) 263
U. Fano : *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **13** (1961) 1
12) H. Bethe, W. Heitler : *Proc. Roy. Soc.*, **A146** (1934) 83
W. Heitler : The Quantum Theory of Radiation, Oxford (1954)
13) L. D. Landau and I. J. Pomeranchuk : *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **92** (1953) 535, **92** (1953) 735, 英訳が L. Landau : The Collected Papers of L. D. Landau, Pergamon Prees (1965) にある.
A. B. Migdal : *Phys. Rev.* **103** (1956) 1811.
14) P. Anthony *et al.* : *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1949, **76** (1996) 3550, *Phys. Rev.*, **D56** (1997) 1373
15) A. Misaki : Cosmic Rays 92 : Astrophysical, High Enegy and Heliospheric Process, Proc. of European Cosmic Ray Symp., Geneva, Switzerland, ed P. Grier : *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **33A, B** (1993) 192.
K. Kasahara : *Phys. Rev.*, **D31** (1985) 2737
16) B. Rossi : High Energy Particles, Prentice Hall (1952)
17) Fabjan's Review in 9)
18) W. Heitler : The Quantum Theory of Radiation, Oxford ; Clarendon Press (1953)
19) E. Longo and I. Sestili : *Nucl. Instr. Meth.*, **128** (1985) 283
また, PDG, *Phys. Rev.*, **D45** (1992) p. III. 16 も参照
20) C. Fabjan and T. Ludlum : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **32** (1982) 335
T. Gabriel *et al.* : *Nucl. Instr. Meth.*, **195** (1982) 461
D. Bollini *et al.* : *Nucl. Instr. Meth.*, **171** (1980) 237.
A. Sessoms *et al.* : *Nucl. Instr. Meth.*, **161** (1979) 371
21) R. Wigmans : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **41** (1991) 133
C. Fabjan *et al.* : *Nucl. Instr. Meth.*, **141** (1977) 61
22) 小田　稔：宇宙線, 裳華房 (1972)
23) J. Litt and R. Meunier : *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **23** (1973) 1
24) DELPHI : *Nucl. Instr. Meth.*, **A303** (1991) 233
25) N. Kanda : *Ph. D. Thesis*, Osaka Univ (1993)

M. Sakuda *et al.*: *Nucl. Instr. & Methods*, **A311** (1992) 57
N. Terunuma *et al.*: *ibid.*, **A323** (1992) 471
作田　誠：遷移放射検出器の開発，物理，**48**, 2 (1993) 87
26) G. Charpak *et al.*: *Nucl. Instr. and Meth.*, **62** (1968) 235
27) A. Breskin *et al.*: *Nucl. Instr. Meth.*, **124** (1975) 189
28) VENUS; R. Arai *et al.*: *Nucl. Instr. Meth.*, **A217** (1983) 181
29) TOPAZ; T. Kamae *et al.*: *Nucl. Instr. Meth.*, **A252** (1986) 423
30) ALEPH Status Report, CERN/LEPC 84-15, LEPC/M50 (1984), *Nucl. Instr. Methods*, A294 (1990) 121
31) I.J. Kroll: *Int. Conf. at Beijing*, Aug. 10-15 (1994)

索　引

第Ⅰ巻：1〜262頁，第Ⅱ巻：263〜489頁.

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

著者略歴

長島順清（ながしま よりきよ）

1938年　東京都に生まれる
1965年　東京大学大学院数物系研究科
　　　　博士課程修了
現　在　大阪大学大学院理学系研究科
　　　　物理学専攻・教授
　　　　理学博士

朝倉物理学大系3

素粒子物理学の基礎 I　　　　定価はカバーに表示

1998年12月1日　初版第1刷

著　者　長　島　順　清
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店

東京都新宿区新小川町 6-29
郵便番号　162-8707
電　話　03(3260)0141
F A X　03(3260)0180
http://www.asakura.co.jp

〈検印省略〉

平河工業社・渡辺製本

ISBN 4-254-13673-0 C 3342　　　　Printed in Japan